I. Hydro-statique et dynamique, gravitation

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants
2. Les équations (quasi-statiques) de la structure stellaire
3. Solutions simples
4. Le théorème du viriel
5. Quelques échelles de temps

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

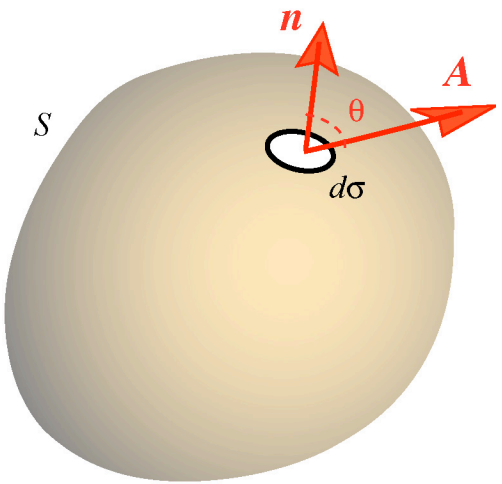
- **Les ingrédients (Mécanique non-relativiste)**
  - Les lois de conservation
    - Masse
    - Quantité de mouvement
    - Energie
  - Les forces en présence
    - Gravitation
  - Les lois de la thermodynamique
    - Première loi
    - Equation d'état
  - (+ Transfert radiatif, réactions thermonucléaires…)

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

- **Rappel: Le théorème de la divergence (de Gauss)**

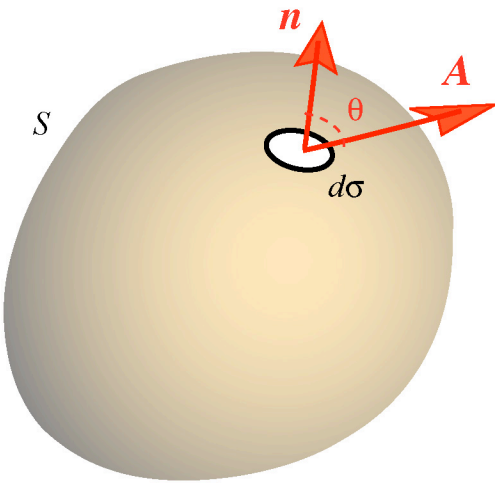
Le *théorème de la divergence* stipule que pour tout champ vectoriel $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ régulier défini dans un volume V délimité par la surface fermée S, la relation suivante est vraie:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x$$



1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

a) L'équation de continuité (conservation de la masse)



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}d\sigma.$$

A partir du théorème de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v})dV.$$

Comme cela est vrai quel que soit V, on déduit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

a) L'équation de continuité (conservation de la masse)

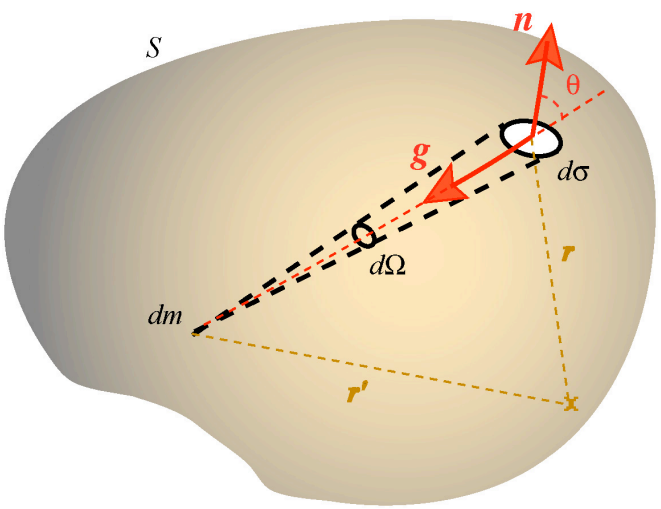
$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Avec, par définition, la dérivée en suivant le mouvement (approche Lagrangienne):

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})$$

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

b) L'équation de Poisson



L'accélération gravitationnelle due à un élément de masse dm s'écrit:

$$\mathrm{g}(\mathrm{r}) = -Gdm\frac{\mathrm{r}-\mathrm{r}'}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3}$$

La composante normale à g integrée sur l'élément de surface $d\sigma$ est donc:

$$\mathrm{g}(\mathrm{r})\cdot\mathrm{n}\; d\sigma = -Gdm\frac{\cos\theta}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^2}\; d\sigma,$$

où θ est l'angle entre $\mathrm{r}-\mathrm{r}'$ et n. Vu de dm, la surface $d\sigma$ sous-tend un angle solide

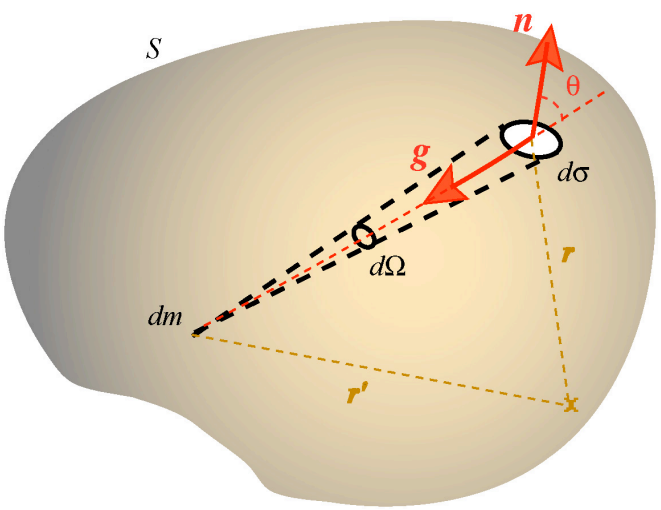
$$d\Omega = \frac{\cos\theta}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^2}\; d\sigma.$$

Ainsi, on peut montrer que

$$\oint_S \mathrm{g}\cdot\mathrm{n}d\sigma = -4\pi G\int_V \rho(x)d^3x.$$

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

b) L'équation de Poisson



$$\oint_S \mathrm{g}\cdot\mathrm{n}d\sigma = -4\pi G\int_V \rho(x)d^3x.$$

Le *théorème de Gauss* implique que:

$$\int_V (\nabla\cdot\mathrm{g}+4\pi G\rho)d^3x = 0.$$

Cette relation étant vraie quel que soit V, on en déduit *l'équation de Poisson*

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho,$$

où l'on a introduit le *potentiel gravitationnel* Φ tel que $\mathrm{g} = -\nabla\Phi$.

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

b) L'équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Potentiel gravitationnel

Constante gravitationnelle

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

c) La conservation de la quantité de mouvement (équation de Navier-Stokes)



$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

Pression

Viscosité

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

d) La conservation de l'énergie (v=0; Φ=cte)

- Conservation de la masse + conservation de la quantité de mouvement + 1ere loi de la thermodynamique =>

$$Tds = du + Pd(1/\rho) - \sum_i Y_i dX_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \Phi\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \Phi\right)\right] = \rho T\frac{Ds}{Dt}$$

E. cinétique

E. Interne spécifique

Enthalpie

u Energie interne spécifique

$h = u + P/\rho$ Enthalpie spécifique

$Tds = du + Pd(1/\rho)$ s : Entropie spécifique

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

e) Equation d'état

$$\rho = \rho(P, T, \{X_i\}); \qquad S = S(P, T, \{X_i\})$$

Composition chimique

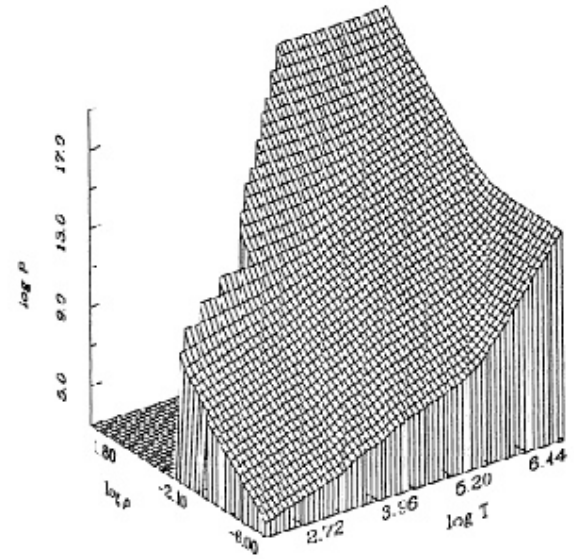


FIG. 4.—Pressure surface for hydrogen. The pressure P is in dyn cm^{-2}.

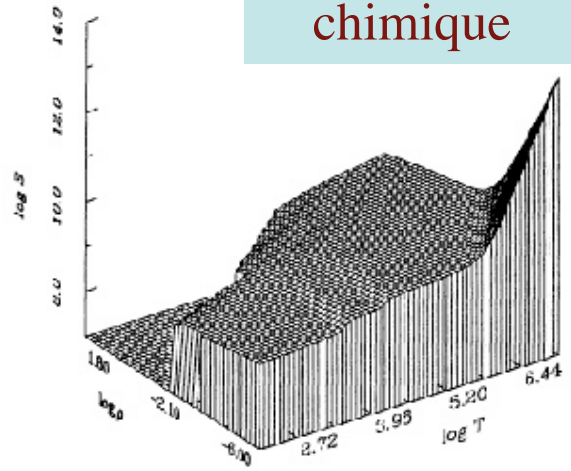


FIG. 5.—Entropy surface for hydrogen. The entropy S is in ergs g^{-1} K^{-1}.

1. Equations hydrodynamiques des systèmes autogravitants

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P - \boldsymbol{\nabla}\Phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \Phi\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \Phi\right)\right] = \rho T\frac{Ds}{Dt}$$

$$\rho = \rho(P, T, \{X_i\}); \qquad S = S(P, T, \{X_i\})$$

Ces 6 équations (+équations d'état) lient les variations temporelles (t) et spatiales (**x**) des variables:

v, Φ, P, T (ou ρ, s, ou u, h…)

2. Les équations (quasi-statiques) de la structure stellaire

- **Hypothèses**
  - Structure sphérique (rotation négligeable)
  - Viscosité négligeable
  - Vitesses négligeables

  \+ Réactions thermonucléaires

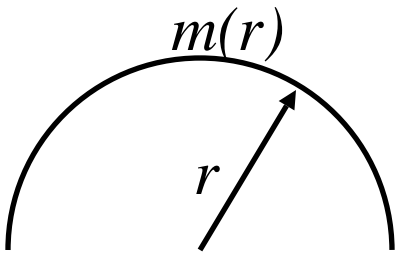
  \+ Transfert radiatif

2. Les équations (quasi-statiques) de la

- **Equation de continuité**

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Symétrie sphérique:



$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

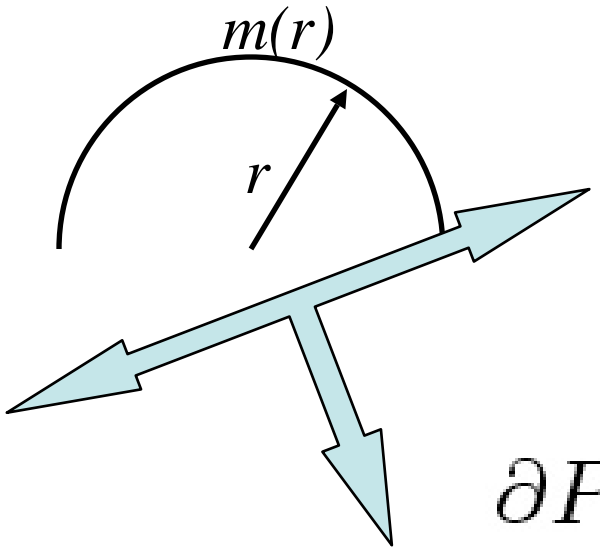
$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

2. Les équations (quasi-statiques) de la

- Conservation de la quantité de mouvement (équilibre hydrostatique)

Symétrie sphérique:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$



$$g = \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

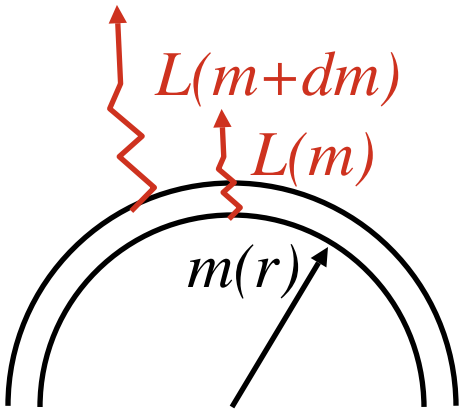
$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

2. Les équations (quasi-statiques) de la

- **Conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u+\Phi\right)\right]+\nabla\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h+\Phi\right)\right]=\rho T\frac{Ds}{Dt}$$

On introduit une quantité essentielle: *L(m)*, la luminosité



$$dL(m)=L(m+dm)-L(m)=\left[\dot{\epsilon}(m)-\frac{\delta Q}{\partial t}\right]dm$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta Q}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t}-P\frac{\partial V}{\partial t}\\ &= -c_P\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}\\ &= T\frac{\partial S}{\partial t}\end{aligned}\qquad \delta=-\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial \ln P}\right)_T$$

$$\frac{\partial L}{\partial m}=\dot{\epsilon}-T\frac{\partial S}{\partial t}$$

2. Les équations (quasi-statiques) de la structure stellaire

- **Transport de l'énergie**

Dans un milieu *radiatif* :

$$F = -K\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{K}\frac{L}{4\pi r^2}$$

Plus généralement :

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{T}{P}\frac{\partial P}{\partial m}\nabla_T$$

Où on a défini le *gradient de température* :

$$\nabla_T \equiv \frac{d\ln T}{d\ln P}$$

2. Les équations (quasi-statiques) de la structure stellaire

Cas hydrodynamique

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P - \boldsymbol{\nabla}\Phi + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \Phi\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \Phi\right)\right] = \rho T\frac{Ds}{Dt}$$

Cas hydrostatique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial m} = -\dfrac{Gm}{4\pi r^4} + \dfrac{\omega^2}{6\pi r} + \dfrac{GM}{4\pi R^3 r}\varphi_\omega, \\ \dfrac{\partial T}{\partial m} = \left(\dfrac{\partial P}{\partial m}\right)\dfrac{T}{P}\nabla_T, \\ \dfrac{\partial r}{\partial m} = \dfrac{1}{4\pi r^2\rho}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial m} = \dot{\epsilon} - T\dfrac{\partial S}{\partial t}, \end{cases}$$

$$\rho = \rho(P, T, \{X_i\}); \qquad S = S(P, T, \{X_i\})$$

2. Les équations (quasi-statiques) de la structure stellaire

Les conditions aux limites

$$m = 0 \longrightarrow r = L = 0$$
$$m = M \longrightarrow P = P_{\mathsf{phot}}(g, L)$$
$$T = T_{\mathsf{phot}}(g, L)$$

Exemple: approximation d'Eddington

$$T = T_{\mathsf{eff}}$$
$$P = \frac{2}{3}\frac{g}{\kappa}$$

3. Solutions simples

- Equation hydrostatique « moyennée »

$$P_c \approx \frac{2GM^2}{\pi R^4}$$

- Avec loi du gaz parfait:

$$T_c \approx \frac{8}{3}\frac{\mu}{\mathcal{R}}\frac{GM}{R}\frac{\overline{\rho}}{\rho_c}$$

4. Le théorème du viriel

- **En utilisant uniquement l'équation d'équilibre hydrostatique!**

$$-\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm = \int_0^M 4\pi r^3 \frac{Gm}{4\pi r^4} dm.$$

$$3\int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \int_0^M \frac{Gm}{r}.$$

$$E_{\rm i} \equiv \int_0^M u dm = \int_0^M \frac{3}{\xi}\frac{P}{\rho} dm \qquad E_{\rm g} \equiv -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

$$\xi \equiv 3P/u\rho$$

$$\xi E_{\rm i} + E_{\rm g} = 0,$$

4. Le théorème du viriel

$\xi \equiv 3P/u\rho$

$$\xi E_{\rm i} + E_{\rm g} = 0,$$

Energie totale du système: $W = E_{\rm i} + E_{\rm g}$

Conservation de l'énergie (pas de réactions thermonucléaires…etc.):

$$\frac{dW}{dt} + L = 0$$

$$L = (\xi - 1)\frac{dE_{\rm i}}{dt} = -\frac{\xi - 1}{\xi}\frac{dE_{\rm g}}{dt}.$$

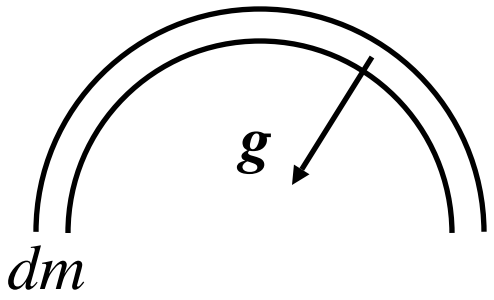
5. Quelques échelles de temps

- **Temps de Kelvin-Helmholtz**
  - C'est le temps maximum pendant lequel une étoile peut rayonner une luminosité L à partir uniquement de l'énergie gravitationnelle E_g.
  - C'est aussi le temps caractéristique de contraction lors de la phase pré-séquence principale, càd avant que les réactions thermonucléaires n'apparaissent.

$$\tau_{KH} = \frac{|E_g|}{L} \approx \frac{GM^2}{2RL}$$

5. Quelques échelles de temps

- **Equation du mouvement & temps hydrodynamiques**



$$\frac{dm}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial m}dm - \frac{g dm}{4\pi r^2}$$

Temps de chute libre: $\tau_{ff} \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$

Temps d'explosion: $\tau_{\text{expl}} \approx R\left(\frac{\rho}{P}\right)^{1/2}$

Temps « hydrodynamique »: $\tau_{\text{hydro}} \approx \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \approx \frac{1}{2}\left(G\bar{\rho}\right)^{-1/2}$