# ESTER ou l'Évolution STEllaire en Rotation

Michel Rieutord

Observatoire Midi-Pyrénées

# Plan

1. Enjeux Astrophysiques
2. Méthode et exemples
3. Premier pas : Les étoiles isolées en rotation rapide

# Enjeux Astrophysiques

1. Connaître l'évolution de la rotation au cours de la vie d'une étoile.
2. Comprendre les effets de la rotation
   – sur l'abondance des éléments
   – sur le spectre des oscillations propres
3. Comprendre les mécanismes de pertes de moments angulaires et leurs effets
4. Comprendre la relation rotation-activité magnétique

En résumé : Construire des modèles cohérents permettant d'évaluer les effets de la rotation aux grandes échelles de temps.

# Méthode et exemples

Méthode : aller du plus « simple » au plus compliqué.
Mais quel est le plus simple ?

Simplicité = modèle dépendant d'un faible nombre de paramètres

Exemples (sans garantie !) :

- Etoile isolée en rotation rapide et sur la séquence principale.
- Etoile avec freinage magnétique imposé.

– ...

Problème : les conditions initiales peuvent faire exploser le nombre de paramètres...

# L'étoile ZAMS en rotation rapide

C'est le cas « simple » qui permet d'étudier les propriétés des modèles 2D (par exemple rôle de la déformation centrifuge sur le spectre d'oscillation).

Il s'appliquerait à diverses étoiles variables ($\delta$-Scu, $\zeta$Oph, $\gamma$ Dor...).

# Une première approche

Schématiquement en deux étapes :

- Calcul de la structure hydrostatique d'un bipolytrope en rotation
- Modélisation de la zone radiative stationnaire forcée par une situation barocline.

# Une petite mise en bouche...

Le bipolytrope : zone radiative et zone convective sont approximées par des équations d'état polytropique. n=1.5 pour la ZC ; n=3 ou n=3.25 pour la ZR.

Dans ce cas il nous faut résoudre l'équation de Poisson associée à l'équation de l'hydrostatique avec des conditions de régularité au centre et de raccord à un potentiel harmonique à l'infini.

$$\Delta\phi = H_<^{n_1}$$

$$\Delta\phi = \rho_1 H_>^{n_2}$$

avec

$$H_< = 1 - \Lambda(\phi - \phi_0) + \frac{1}{2}\Omega_\star^2 s^2$$

$$H_> = 1 + \left(\frac{n_1+1}{n_2+1}\right) H_1^{-1}\left(\phi_{\text{eff}}(1) - \phi_{\text{eff}}\right)$$

$$\phi_{\text{eff}} = \Lambda(\phi - \phi_0) - \frac{1}{2}\Omega_\star s^2$$

$$\Lambda = \frac{H_1}{\Phi_{\rm eq} - \Phi_0} \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + 1} \right) + \frac{1 + \frac{1}{2}\Omega_\star^2}{\Phi_{\rm eq} - \Phi_0}$$

i.e. $\Lambda$ doit être tel que la densité s'annule à l'équateur.

# Méthode numérique

On doit résoudre une équation de Poisson

$$\Delta\phi = \rho(\phi)$$

avec des conditions aux limites à la surface, inconnue, de l'étoile.

Première méthode : dans un domaine sphérique, on laisse la matière relaxée vers son équilibre. Les champs sont décomposés sur les HS et on impose

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial r} + \frac{(l+1)\phi_l}{r} \quad \text{en} \quad r = 1$$

C'est parfait pour connaître la forme d'équilibre et ses paramètres, mais ce n'est pas utilisable pour la suite...

Exemples :

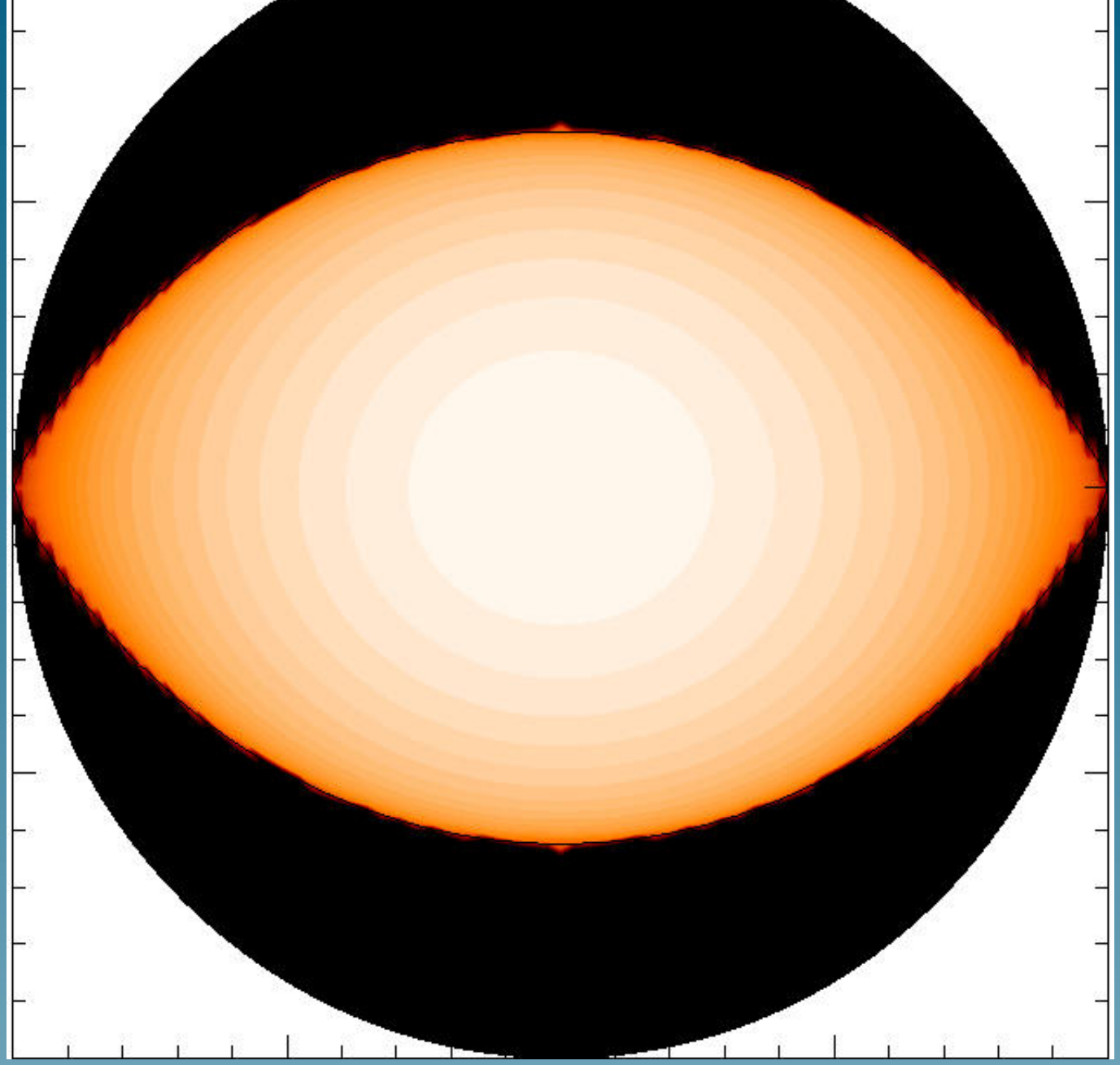


FIG. 1: Polytrope n=3/2 en rotation maximale.

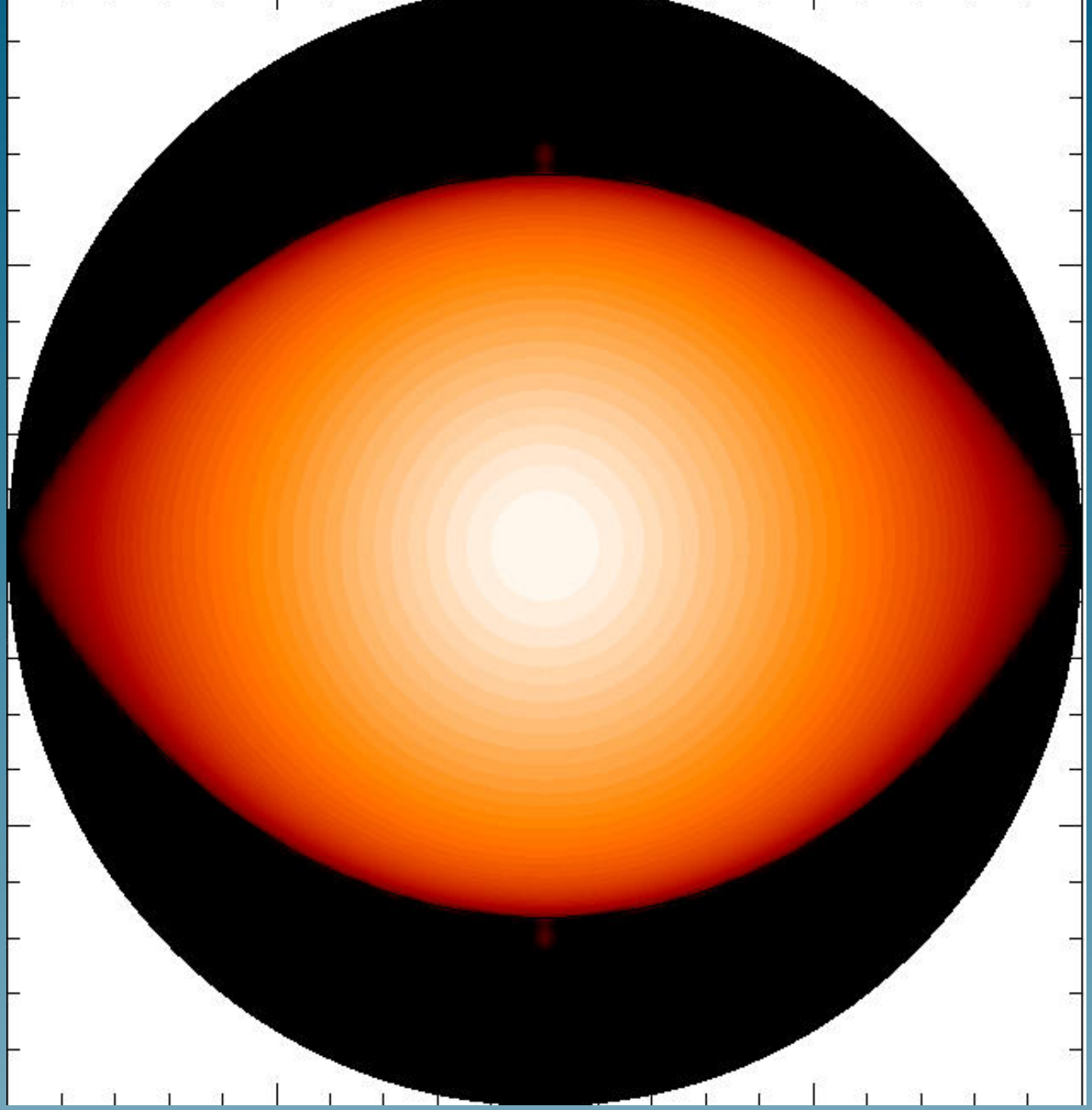


FIG. 2: Polytrope n=3 en rotation maximale.

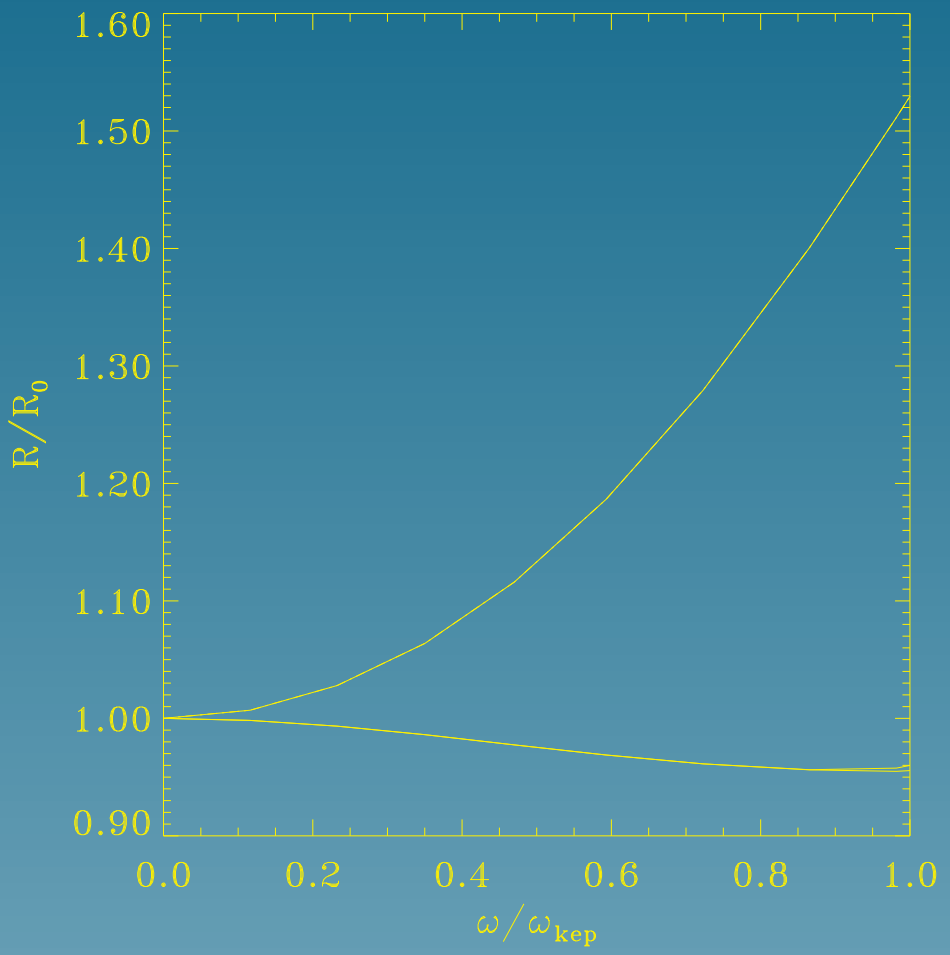



FIG. 3: Evolution of the equatorial and polar radii for a $n = 3/2$ polytrope of constant mass and $K$.

Pour faire de la dynamique des fluides ou bien connaître le champ de température, on a besoin d'un système de coordonnées adaptées à la surface de l'étoile où on pourra imposer les conditions limites du champ de vitesse ou de la température.

Méthode : elle a été explicitée par Bonazzola, Gourgoulhon et Marck 1998 :

On introduit les coordonnées $\zeta, \theta, \varphi$ adaptées à la géométrie d'une étoile déformée par force centrifuge ; elles sont reliées à la géométrie sphérique par :

$$r = \zeta + A(\zeta)(R(\theta) - 1), \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi \qquad (1)$$

La fonction $A(\zeta)$ est donnée par l'utilisateur et doit être telle que $A(0) = 0$ et $A(1) = 1$. $R(\theta) - 1$ est alors la déformation de la surface par rapport à la sphère de rayon unité. Pour assurer la régularité du mapping au voisinage de l'origine, Bonazzola et al. (1998) prennent $A(\zeta) = (5\zeta^3 - 3\zeta^5)/2$.

Les vecteurs de base des coordonnées naturelles associés à cette géométrie sont définis par :

$$\vec{E}_\zeta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta}, \quad \vec{E}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \quad \vec{E}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

Explicitant ces définitions, on trouve

$$\vec{E}_\zeta = r_\zeta \vec{e}_r, \quad \vec{E}_\theta = r_\theta \vec{e}_r + r\vec{e}_\theta, \quad \vec{E}_\varphi = r\sin\theta \vec{e}_\varphi$$

La base contravariante est donnée par

$$\vec{E}^\zeta = \frac{\vec{e}_r}{r} - \frac{r_\theta}{r r_\zeta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{E}^\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{r}, \quad \vec{E}^\varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}$$

On a utilisé les notations suivantes :

$$r_\zeta = \frac{\partial r}{\partial \zeta}, \quad r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

et la relation entre coordonnées contravariantes et covariantes :

$$V^i = g^{ij} V_i$$

où la métrique est donnée par :

$$g^{\zeta\zeta} = \frac{r^2 + r_\theta^2}{r^2 r_\zeta^2}, \quad g^{\zeta\theta} = -\frac{r_\theta}{r^2 r_\zeta}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

# Le Laplacien

On a

$$\Delta = g^{\zeta\zeta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + c_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} + 2g^{\zeta\theta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\theta} + g^{\theta\theta}\Delta_{\theta\varphi}$$

avec

$$c_\zeta = \frac{1}{r^2 r_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{r^2 + r_\theta^2}{r_\zeta}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\}$$

Problème : les variables $\zeta, \theta$ ne sont pas séparables. On décompose donc l'opérateur laplacien en sa partie sphérique et sa partie non-sphérique ; on pose

$$\Delta\phi = g^{\zeta\zeta}\tilde{\Delta}\phi - R(\phi)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\Delta_{\theta\varphi}$$

et il suffit alors de résoudre, itérativement,

$$\tilde{\Delta}\Phi = \frac{1}{c_m}\left(H^n + R_r\right) + \left(1 - \frac{g^{\zeta\zeta}}{c_m}\right)\tilde{\Delta}\Phi \qquad (2)$$

# Le multi-domaine

On utilisera 2 domaines : l'étoile $(0 \leq \zeta \leq 1)$ et l'autre $(1 \leq \zeta \leq 2)$ couvrant le vide compris entre l'étoile et la sphère où les conditions aux limites du champ gravitationnel sont appliquées. D'après Bonazzola et al. 1998, un bon mapping est donné par :

$$A(\zeta) = (5\zeta^3 - 2\zeta^5)/2, \quad \zeta \leq 1$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{4}\left(\xi^3 - 3\xi + 2\right), \quad \xi = 2\zeta - 3, \quad 1 \leq \zeta \leq 2$$

# La discrétisation

Elle est spectrale : deux grilles de tchebyshev radiale, les harmoniques sphériques horizontalement :

$$\phi = \sum_{l=0,2,\ldots} \phi_l(\zeta_i) Y_\ell^m$$

# Au delà du polytrope

Le noyau convectif central est supposé bien reproduit par un polytrope 3/2 et on se concentre sur la zone radiative.

Le champ de température est donné par :

$$\mathrm{div}(\chi\vec{\nabla}T) = 0$$

avec les conditions limites

$$T = T_1 \quad \text{at} \quad r = R_1(\theta), \qquad T = 0 \quad \text{at} \quad r = R_2(\theta)$$

En introduisant l'écart à la solution polytropique, $\delta T$, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \Delta\delta T = -\vec{\nabla}\ln\chi\cdot\vec{\nabla}T - \Delta T_{poly} \\ \ln\chi = -(\nu+1)\ln\rho + (s+3)\ln T \\ \delta T = 0 \quad \text{at} \quad \xi = \pm 1 \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$\vec{\nabla}\ln\chi\cdot\vec{\nabla}T = (g^{ni}\partial_i T\vec{E}_n)\cdot(\partial_j\ln\chi\vec{E}^j)$$

$$= g^{\zeta\zeta}\partial_\zeta T\partial_\zeta\ln\chi + g^{\zeta\theta}(\partial_\zeta\ln\chi\partial_\theta T + \partial_\zeta T\partial_\theta\ln\chi) + g^{\theta\theta}\partial_\theta T\partial_\theta\ln\chi$$

# Le champ de vitesse de la zone radiative

Il est forcé par le couple barocline

$$\vec{\nabla} P \wedge \vec{\nabla} \rho$$

Sans viscosité, l'écoulement (stationnaire) engendré est purement azimutal (rotation différentielle ou vent thermique) et sans doute instable.

Avec la viscosité une circulation méridienne apparaît permettant l'équilibre des flux de moment cinétique dans l'étoile.

# Calcul du champ de vitesse

C'est la grosse difficulté technique du problème....

# Equations des perturbations de l'équilibre

On suppose la fluctuation de température donné par les équations suivantes :

$$\text{div}(\chi\vec{\nabla}T) = 0$$

et les conditions aux limites. On pose $T = T_{\text{poly}} + \delta T$ où $T_{\text{poly}}$ est le champ de température polytropique qui n'est pas solution de l'équation précédente.

Si on suppose la viscosité dynamique constante et

l'équation d'état celle du gaz parfait, alors on a :

$$\begin{cases} 2\vec{\Omega} \wedge \rho\vec{v} = -\vec{\nabla}\delta P + \delta\rho\vec{g} + \mu\Delta\vec{v} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{v}) \\ \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

où on a aussi négligé les variations de la gravité. En posant

$$\vec{w} = \rho\vec{v}$$

et en notant que

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta T}{T}$$

on doit résoudre le problème forcé suivant :

$$\begin{cases} \nu \Delta \vec{w} + \nu L(\vec{w}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{w} - \vec{\nabla} \delta P + \frac{\delta P}{P} \rho \vec{g} = \frac{\delta T}{T} \rho \vec{g} \\ \text{div}\, \vec{w} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions limites suivantes

$$\vec{w} = \vec{w}_{\text{core}} \quad \text{en} \quad \zeta = \eta$$

$$\text{stress} - \text{free} \quad \text{en} \quad \zeta = 1$$

$L$ est un opérateur d'ordre 1.

Si on adimensionne $\vec{w} = \frac{\rho_0 g_0 R^2}{\nu}$, $R$ étant l'échelle de longueur, $\rho_0$ celle de densité, $g_0$ celle de gravité, alors on obtient :

$$\Delta\vec{u} - E^{-1}\vec{e}_z \wedge \vec{u} + L_\rho(\vec{u}) - \vec{\nabla}p + p\frac{\rho\vec{g}}{P} = \frac{\delta T}{T}\rho\vec{g}$$

et $\operatorname{div}\vec{u} = 0 +$ Conditions aux limites.

# Expression de l'opérateur laplacien vectoriel

D'après Mihalas et Mihalas on a

$$\Delta\vec{V})^i = \left(g^{kj}V^i_{;j}\right)_{;k}$$

Posons

$$T^{ki} = g^{kj}V^i_{;j}$$

alors

$$(\Delta\vec{V})^i = \partial_k T^{ki} + \Gamma^k_{mk} T^{mi} + \Gamma^i_{mk} T^{km}$$

Comme $\Gamma^k_{mk} = \partial_m(\ln\sqrt{g})$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\Delta\vec{V})^i &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\left(\sqrt{g}T^{ki}\right) + \Gamma^i_{mk}T^{km} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\left(\sqrt{g}g^{kj}(\partial_j V^i + \Gamma^i_{jl}V^l)\right) + \Gamma^i_{mk}g^{kj}(V^m_{,j} + \Gamma^m_{jl} \\
&= \Delta V^i + 2\Gamma^{ij}_m\partial_j V^m + A^i_j V^j
\end{aligned}$$

avec

$$\Gamma^{ij}_k = g^{jl}\Gamma^i_{lk}$$

$$A^i_j = \Gamma^{il}_k\Gamma^k_{lj} + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k\left(\sqrt{g}\Gamma^{ik}_j\right)$$

On a

$$\Gamma^{\zeta\zeta}_\zeta = g^{\zeta\zeta}\frac{r_{\zeta\zeta}}{r_\zeta} - \frac{r_\theta}{r^2 r_\zeta}\left(\frac{r_{\zeta\theta}}{r_\zeta} - \frac{r_\theta}{r}\right), \qquad \Gamma^{\zeta\theta}_\zeta = \frac{r_{\zeta\theta}}{r^2 r_\zeta} - \frac{r_\theta}{r^3} - \frac{r_\theta r_{\zeta\zeta}}{r^2 r_\zeta^2},$$

$$\Gamma^{\zeta\zeta}_\theta = \frac{(r^2 + r_\theta^2)r_{\zeta\theta}}{r^2 r_\zeta^2} - \frac{r_\theta r_{\theta\theta}}{r^2 r_\zeta}, \qquad \Gamma^{\zeta\theta}_\theta = \frac{r_\zeta(r_{\theta\theta} - r) - r_\theta r_{\zeta\theta}}{r^2 r_\zeta^2},$$

$$\Gamma^{\varphi\varphi}_{\zeta} = \frac{r_\zeta}{r^3 \sin^2\theta}, \qquad \Gamma^{\varphi\varphi}_{\theta} = \frac{r_\theta/r + \cot\theta}{r^2 \sin^2\theta}, \qquad \Gamma^{\varphi\zeta}_{\varphi} = \frac{r - r_\theta \cos}{r^2 r_\zeta}$$

$$\Gamma^{\zeta\varphi}_{\varphi} = \frac{r_\theta \cos\theta - r \sin\theta}{r^2 r_\zeta \sin\theta}, \qquad \Gamma^{\theta\varphi}_{\varphi} = -\frac{\cot\theta}{r^2} = -\Gamma^{\varphi\theta}_{\varphi}$$

$$\Gamma^{\zeta\zeta}_{\varphi} = \Gamma^{\zeta\theta}_{\varphi} = \Gamma^{\theta\theta}_{\varphi} = \Gamma^{\theta\zeta}_{\varphi} = \Gamma^{\theta\theta}_{\theta} = \Gamma^{\varphi\varphi}_{\varphi} = \Gamma^{\varphi\zeta}_{\zeta} = \Gamma^{\zeta\varphi}_{\zeta} = \Gamma^{\varphi\theta}_{\zeta} = \Gamma$$

# Situation présente

On a résolu l'équation du champ de vitesse avec une résolution de L=32 (HS), N=96 (radial) ; $\Omega/\Omega_K \sim 0.5$, aplatissement de 0.12, Nb de Reynolds de $10^6$.

Problème en suspens : améliorer la physique du background.