Chapitre 3

Analyse de l'activité solaire

3.1 Caractéristiques d'un signal

3.1.1 Différents types de signaux

Il est possible de faire la distinction entre un certain nombre de signaux (figure 3.1) dont les deux grands groupes sont celui des signaux certains (c'est-à-dire déterministes) et celui des signaux aléatoires. Un processus aléatoire est un phénomène physique caractérisé par des grandeurs dont les valeurs successives sont gouvernées par les lois probabilistes (c'est-à-dire non déterministes). Le phénomène a une évolution imprévisible. Un signal aléatoire met en évidence un processus aléatoire. Ce sont des signaux à puissance moyenne finie (voir la définition plus loin). Un signal aléatoire est dit stationnaire si sa cause physique est invariante par translation dans le temps. La stationarité est souvent fonction de l'échelle temporelle (un signal peut être stationnaire pour des échelles de quelques minutes et ne plus l'être pour des échelles de quelques jours).

Des critères quadratiques permettent de faire une autre distinction entre les signaux. Dans le cas d'un *signal à énergie finie* $s(t)$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \tag{3.1}$$

et si $s(t)$ est à *puissance moyenne finie*, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt < \infty \tag{3.2}$$

Ces deux sortes de signaux se traitent différemment. En effet, les signaux à énergie finie sont à puissance moyenne nulle.

3.1.2 Notion de continuité et de discrétisation

Cette notion permet de caractériser la façon dont le signal nous parvient (voir la figure 3.2 pour les illustrations).

Un *signal continu à temps continu* est un signal analogique (le 220 V des prises électriques par exemple). Il n'y a que l'oscilloscope qui permette de le visualiser.

Un signal peut admettre des variations continues ; c'est alors un *signal continu à temps discret*. Il correspond à un échantillonnage idéal. C'est généralement le cas de toute information qui va être stockée et traitée informatiquement.

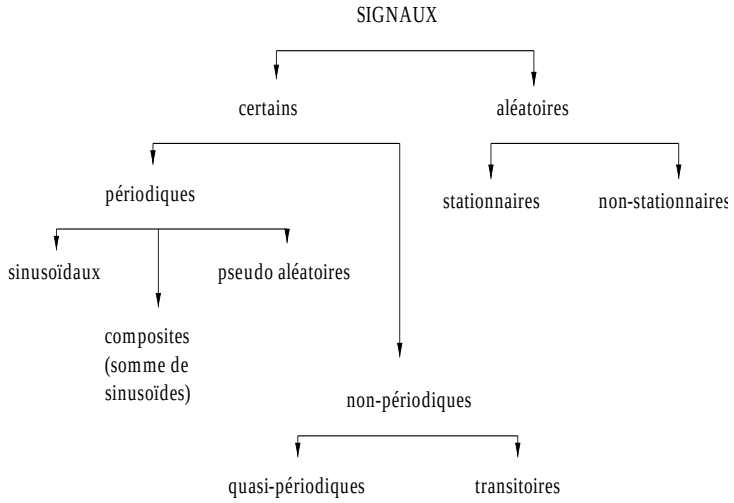


Figure 3.1: *Les différentes catégories de signaux.*
L'ensemble des signaux peut être décomposé en deux grandes familles, celle des signaux déterministes (c'est-à-dire certains) et celles des signaux non-déterministes (ou aléatoires). Les signaux pseudo-aléatoires sont constitués de signaux périodiques mais dans chaque période, il y a des phénomènes aléatoires. Parmi les signaux non périodiques, on distingue les signaux quasi-périodiques, constitués d'une superposition des signaux sinusoïdaux dont les périodes ne sont pas commensurables, et les signaux transitoires, comme les décharges de capacité par exemple.

Il existe aussi des *signaux discrets à temps continu* (la variation de la luminosité du Soleil par exemple, puisqu'il n'est observable que de jour, ou les processus binaires qui interviennent en télécommunication) et des *signaux discrets à temps discrets* dont les valeurs successives ne peuvent pas être continues car elles varient comme des nombres entiers (les gains au loto par exemple).

Les mesures de signaux solaires sont tous à temps discret. Il n'est pas possible de mesurer de façon continue et de stocker en même temps. Il faut un certain temps pour que la mesure soit stockée et c'est cette durée, entre autre, qui implique que les signaux soient à temps discret. Les variations peuvent en revanche être discrètes ou continues.

L'échantillonnage est un point important dans la caractérisation d'un signal. Si les mesures sont sous-échantillonnées, le risque est grand d'avoir une perte considérable d'information et d'être induit en erreur lors de l'analyse.

3.1.3 Quelques notions de statistiques utiles

Lorsque l'on échantillonne un signal, on ne prend que des valeurs numériques discrètes : de cette façon, on ne peut pas avoir une représentation totale du signal. On est en présence de ce qui est appelé une réalisation observée c'est-à-dire d'une série de mesures effectuées dans des conditions que l'on espère identiques. Les mesures sont cependant différentes. L'estimation statistique consiste à essayer de créer un modèle à partir des résultats des mesures. On verra par exemple, au chapitre 5, comment à partir du nombre de groupe de taches observés sur le Soleil, il est possible de parvenir à la conclusion que les variations journalières de ce nombre sur un mois, suivent une loi de distribution de type Poisson.

Par la suite, une distinction sera faite entre un signal continu fonction du temps $x(t)$ et la réalisation X, ensemble de mesures faites pour des temps discrets comptés de 1 à

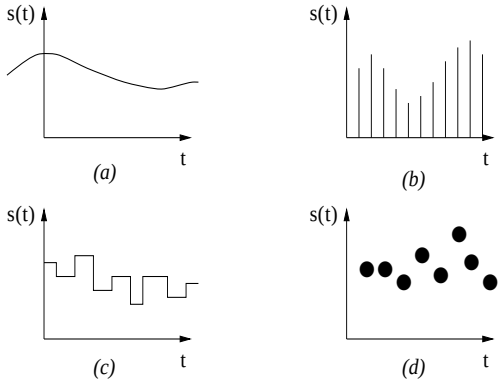


Figure 3.2: *Continuité et discrétisation d'un signal.*
Les signaux peuvent être continus à temps continu (a) ou à temps discret (b), ou alors ils peuvent avoir des variations discrètes à temps continu (c) ou à temps discret (d).

n : $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. Les formules des paragraphes suivants sont en général écrites pour les signaux continus et discrets.

Moyenne - variance - écart-type

Soit $x(t)$ un signal fonction du temps et $p(x)$ sa densité de probabilité. Si $F(x)$ représente la probabilité qu'un élément de la fonction soit inférieur à une certaine valeur x, alors la densité de probabilité est :

$$p(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

dans le cas continu. La *moyenne d'ensemble*[1] appelée aussi *espérance mathématique* est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \tag{3.3}$$

où p_i est la densité de probabilité d'un échantillon x_i de la réalisation X. La *moyenne sur le temps* est définie par :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\, dt \tag{3.4}$$

Si la moyenne d'ensemble et la moyenne temporelle sont égales, alors le processus est dit ergodique à l'ordre 1. La *variance*, de même que l'espérance sont des paramètres donnant une idée du type de la variable X. La variance est définie par :

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i \Leftrightarrow E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x \Leftrightarrow E(X))^2 p(x) dx$$

ou encore :

$$var(X) = E(X^2) \Leftrightarrow E(X)^2$$

Elle permet d'avoir un aperçu de la façon dont les données sont réparties autour de la moyenne. L'*écart-type*, généralement noté σ est la racine carrée de la variance. Beaucoup

[1] La moyenne d'ensemble est généralement notée $< X >$

de phénomènes météorologiques suivent des lois qui n'ont ni moyenne d'ensemble, ni variance sur des échelles de temps de l'ordre de la semaine à l'année. Ils peuvent en effet être soumis à des fluctuations imprévisibles avec des fréquences telles qu'il n'est pas possible de faire des moyennes. En revanche, une moyenne sur les trente dernières années est possible.

Fonction d'autocorrélation et d'autocovariance

Seul le cas de signaux non déterministes sera traité ici. τ représente un décalage temporel pour le signal $x(t)$. La *fonction d'autocorrélation statistique* est donnée par :

$$R_{xx}(\tau) = E(x(t), x(t+\tau)) = \int_{x_1}\int_{x_2} x_1 x_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \tag{3.5}$$

x_1 et x_2 représentent les valeurs de x aux temps t_1 et t_2 avec $t_1 \Leftrightarrow t_2 = \tau$. La *fonction d'autocorrélation temporelle* est :

$$\phi_{xx}(\tau) = x(t)\bar{x(t+\tau)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt \tag{3.6}$$

Quant à la *fonction autocovariance*, elle représente la fonction d'autocorrélation centrée sur la moyenne $\bar{x}$:

$$C_{xx}(\tau) = E(x(t) \Leftrightarrow \bar{x}; x(t+\tau) \Leftrightarrow \bar{x}) = R_{xx}(\tau) \Leftrightarrow \bar{x}^2 \tag{3.7}$$

Ces fonctions ont des propriétés de symétrie par rapport à $\tau = 0$, de plus, $C_{xx}(0) = \sigma_x^2$ et $R_{xx}(0) = \sigma_x^2 + \bar{x}^2$

En pratique, on dispose de N mesures x_i. La fonction autocovariance s'écrit alors (avec k représentant le décalage précédent τ) :

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}(x_i \Leftrightarrow \bar{x})(x_{i+k} \Leftrightarrow \bar{x}) \tag{3.8}$$

Lorsque la fonction d'aucovariance est divisée par c_0, le résultat est appelé fonction autocorrélation.

Coefficient de corrélation et diagramme de corrélation

Le *coefficient de corrélation* donne une idée de la corrélation existant entre deux ensembles de données x et y, de même nombre N de mesures :

$$r = \frac{\sum(x_i \Leftrightarrow \bar{x})(y_i \Leftrightarrow \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i \Leftrightarrow \bar{x})^2 \sum(y_i \Leftrightarrow \bar{y})^2}} \tag{3.9}$$

Il est alors possible de tracer les variations de ce coefficient en fonction du décalage k que l'on introduit dans l'une des séries temporelles par rapport à l'autre. La fonction introduite ici est appelée la fonction d'intercorrélation :

$$r_k = \frac{\sum(x_i \Leftrightarrow \bar{x})(y_{i+k} \Leftrightarrow \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i \Leftrightarrow \bar{x})^2 \sum(y_i \Leftrightarrow \bar{y})^2}} \tag{3.10}$$

Un coefficient de corrélation positif élevé obtenu pour un décalage positif signifie que y est en avance par rapport à x, et réciproquement un coefficient de corrélation positif obtenu pour un décalage négatif signifie que x est en avance par rapport à y. Un coefficient de corrélation négatif implique une anticorrélation entre les deux séries temporelles. Il est relativement malaisé d'interpréter une telle représentation. En effet, beaucoup de phénomènes différents peuvent provoquer des coefficients de corrélation positifs ou négatifs. Une même périodicité présente dans les deux séries temporelles peut impliquer un coefficient de corrélation positif pour des valeurs de k multiples de cette périodicité et un coefficient négatif pour des valeurs de k multiple de la demi-période. Mais ce n'est pas si simple, car un signal réel n'est pas constituté d'une seule et unique périodicité et en général, cette périodicité n'est même pas constante en amplitude et/ou en temps. Les effets décrits ci-dessous peuvent par conséquent être très atténués. En particulier, une variation lente dans une ou les séries temporelles entraîne l'atténuation d'un certain nombre de coefficients et en revanche implique l'amplification de certains autres. Il est possible de supprimer cette variation à long terme, mais il faudrait pouvoir l'enlever sans perturber les données, ce qui n'est pas facile. Moins les données sont manipulées et plus elles contiennent de l'information "réelle" et utile. Toute manipulation entraîne une modification plus ou moins importante selon le soin que l'on a apporté dans la manipulation et selon la nature de cette dernière. Une interprétation, tout au moins une interprétation soignée, nécessite du temps, de l'expérience et des constants aller-retour entre les séries temporelles, les transformées de Fourier donnant les périodicités présentes, et le tracé des coefficients de corrélation en fonction du décalage. Il est de plus nécessaire de procéder à des tests ou simulations afin de confirmer ou d'infirmer les intuitions.

Il est en général inutile de calculer l'intercorrélation pour des longueurs supérieures au quart des séries temporelles. Le nombre de points restant pour le calcul devient en effet trop petit. De plus, il a été montré (Chatfield 1975) que pour une série temporelle constituée de N nombres aléatoires distribué selon une loi uniforme, r_k suit une loi de distribution a peu près normale de moyenne $\Leftrightarrow 1/N$ et de variance $1/N$. Par conséquent, 95 % des coefficients de corrélation pour un tel diagramme se situent entre $\Leftrightarrow 1/N \pm 2/\sqrt{N}$. Pour N grand, l'intervalle de confiance est $\pm 2/\sqrt{N}$. Dans un diagramme de corrélation dessiné pour de séries temporelles non aléatoires, les valeurs des coefficients se trouvant en dehors de ces limites sont significatives à 5 %. Il faut cependant être attentif, car ainsi que cela a été vu plus haut, des variations à long terme sur les données peuvent diminuer largement certains coefficients de corrélation (voir Chatfield 1975, pour des exemples).

3.1.4 Bruit dans les mesures

Le bruit induit par les instruments de mesure ou par les conditions atmosphériques ou autre est un phénomène important qui doit être pris en compte dans l'analyse autant que possible.

Observations à partir du sol

Un des problèmes majeur de l'observation d'étoiles est le bruit de photon. Mais même dans le cas du Soleil, il peut être d'importance, par exemple, lors d'observations à l'intérieur de l'ombre des taches. Une solution à ce problèmes consiste à observer avec un gros télescope ou alors à essayer de capter le maximum de photons à l'aide d'une caméra CCD (Charge

Coupled Device).

L'extinction atmosphérique est un problème qui ne peut être éliminé qu'en allant observer au-delà de l'atmosphère terrestre. Enfin, la turbulence atmosphérique est à elle seule un gros problème. La chaleur du Soleil provoque une convection thermique de la troposphère terrestre entière. De plus, il chauffe le sol autour du bâtiment contenant l'instrument et provoque une convection locale, il chauffe aussi le bâtiment et particulièrement le dôme. Enfin, l'instrument est lui aussi soumis à la chaleur solaire. Les surfaces chauffées sont des sources d'instabilités. La viscosité de l'air est faible et donc les mouvements convectifs ont un grand nombre de Reynolds et sont alors turbulents. Ces mouvements turbulents affectent l'indice de réfraction et génèrent des aberrations du front d'onde. La solution consiste à placer un système d'optique adaptative qui comprend un analyseur de front d'onde (mesure des déformations provoquées par la turbulence) et un système de commande de moteurs piezo-électriques. Ce dernier calcule en conséquence l'implusion à envoyer à chacun des moteurs pour adapter la surface du miroir de façon à ce que l'image soit exempte de déformations.

Observation à partir de l'espace

Les mesures faites par des instruments à bord de satellites sont exemptes de ce genre d'erreurs (mis à part le bruit de photons et les effets instrumentaux). En revanche, il en existe un certain nombre d'autres parmi lesquelles on peut citer les erreurs liées au système de pointage du Soleil (qui doivent être corrigées), la stabilité du gain de l'instrument, la sensibilité à la température et l'influence des autres instruments embarqués à bord du même satellite.

Quelques remarques

Théorème de la limite centrale. Si les processus formant le bruit sont indépendants et aléatoires et s'ils ont la même distribution statistique (quelle qu'elle soit), alors celle du bruit tend asymptotiquement vers une distribution gaussienne lorsque le nombre de processus tend vers l'infini.

Quelques traductions. *Standard deviation* se traduit par écart-type (σ). Les barres d'erreur sur les données sont données à $\pm 1\sigma$.
Le terme de *standard error* s'applique à l'erreur statistique qui est faite lorsque l'on calcule une moyenne par exemple ; elle peut par conséquent donner une précision sur la mesure si on la calcule sur un sous-ensemble de mesures. Si $\bar{x}$ est la moyenne sur un ensemble de données et si μ est la moyenne des moyennes effectuées sur plusieurs ensembles de données (relatifs à la même expérience) alors l'erreur standard est $E(\bar{x} \Leftrightarrow \mu)^2$.
L'incertitude est en général liée aux erreurs de mesures. La dispersion est quant à elle plutôt relative à l'écart-type.

3.1.5 Mesurer - traiter - analyser

Si l'on parle souvent de traitement du signal c'est qu'analyse et traitement sont complémentaires et que l'un ne va pas sans l'autre.

Analyser, c'est pouvoir dégager l'information essentielle contenue dans un signal, par exemple les structures caractéristiques. La nature de l'information pertinente diffère selon

la nature physique du signal. Il est ensuite possible de reconstruire le signal en ne gardant que l'information essentielle et en éliminant l'information accessoire. Cette notion est liée au concept de traitement du signal.

L'information accessoire se présente sous la forme du bruit lié aux mesures, bruit inhérent à chaque observation. Les incertitudes attachées aux données représentent assez bien ce bruit. Cependant, elles peuvent ne pas prendre en compte tous les bruits de mesure car tous ne peuvent pas être estimés.

3.2 Analyse de Fourier

L'observation de l'évolution d'un signal peut nous renseigner sur son commencement, sa fin, la durée de ses éléments caractéristiques, ses discontinuités, ses changements de rythme, etc. En revanche, une représentation temporelle renseigne peu sur les périodicités présentes dans le signal.

Une technique fondamentale pour la représentation en fréquence consiste à décomposer le signal en une superposition de différentes fonctions. Cette méthode fut généralisée en 1807 par Joseph Fournier et s'applique à l'étude de nombreux problèmes physiques. Les séries de Fourier sont utilisées pour l'étude de signaux périodiques (par exemple, les signaux carrés, triangulaires, etc.). Ceux-ci peuvent en effet être représentés comme une superposition d'une onde sinusoïdale fondamentale (dont la fréquence est appelée la fréquence fondamentale) et de divers harmoniques (de fréquences multiples de la fréquence fondamentale) :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{3.11}$$

Les amplitudes ou coefficients de Fourier sont données par :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)dt \tag{3.12}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cos n\omega t dt \tag{3.13}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega t dt \tag{3.14}$$

Pour les phénomènes non-périodiques, il est nécessaire d'avoir recours à une intégrale de Fourier (c'est-à-dire à une somme continue). Cette méthode consiste à représenter le signal par une superposition d'ondes sinusoïdales de toutes les fréquences possibles. Les amplitudes associées à ces fréquences représentent, comme pour les séries de Fourier, les importances respectives des diverses ondes sinusoïdales. Ces amplitudes forment alors une fonction de la fréquence f appelée "spectre continu des fréquences du signal" : c'est la transformée de Fourier du signal. Elle est calculée à l'aide de l'intégrale de Fourier :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{2i\pi ft}dt \simeq \sum_{n=0}^{N} x_n e^{2i\pi nf/N} \tag{3.15}$$

où N est le nombre de points du signal. La transformée inverse permet de reconstruire le signal à partir des sinusoïdes qui le constituent :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-2i\pi ft} df \tag{3.16}$$

Pour que la transformée de Fourier existe, le signal doit être de carré sommable c'est-à-dire d'énergie finie. Pour les signaux réels, cette condition est toujours remplie puisque la mesure est faite sur un temps fini.

L'analyse par Fourier suppose implicitement que le signal est identique à lui-même en dehors de l'intervalle de mesure. La fonction $X(f)$ étant périodique de période 1, il est d'usage de limiter son intervalle de définition à [-1/2,1/2]. Dans le cas où elle est issue d'un échantillonnage, la valeur 1 de la période doit être remplacée par $1/f_E$ où f_E désigne la fréquence d'échantillonnage.

3.2.1 Effets de l'échantillonnage

Les échantillonnages étudiés se font à période T_e. Le signal de départ continu est donc multiplié par la fonction d'échantillonnage $e(t)$.

$$\hat{x}(t) = x(t)\, e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t \Leftrightarrow kT_e) \tag{3.17}$$

La transformée de Fourier devient donc :

$$\hat{X}(f) = X(f)\, E(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f \Leftrightarrow \frac{n}{T_e}) \tag{3.18}$$

où $E(f)$ est la transformée de Fourier de $e(t)$ et $X(f)$ celle de $x(t)$. $\hat{X}(f)$ est donc périodique de période $1/T_e$. Afin d'éviter que le spectre ne se replie par rapport aux axes de symétrie (voir figure 3.3), il est nécessaire que le signal ne comporte aucune fréquence supérieure à $f_e/2$. Remarquons que le bruit peut avoir des fréquences supérieures à $f_e/2$. Afin d'éviter son repliement, il faut faire un filtrage analogique (qui ne doit pas pour autant déformer le signal) coupant dans la région $f_e/2$ avant de rentrer dans le dispositif d'échantillonnage.

3.2.2 Quelques exemples

Quelques exemples de transformée de Fourier sont donnés sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6.

La transformée de Fourier du nombre de Wolf (figure 3.4) montre l'existence de plusieurs pics correspondant au cycle de Gleissberg (approximativement 80 ans), au cycle solaire et des pics à 12 ans et 8-9 ans. Le pic du cycle solaire est constitué de plusieurs périodicités : 11,13 ans, 10,89 ans, 10,66 ans, 10,44 ans et 10,03 ans.

La transformée de Fourier d'un bruit tiré d'une distribution uniforme (figure 3.5) montre que les amplitudes sont à peu près les mêmes quelle que soit la fréquence. Il faut une infinité de sinusoïdes pour représenter du bruit qui n'est pas constitué de fréquences particulières. Une énergie constante (si le nombre de points tend vers l'infini) sur l'axe des fréquences est caractéristique d'un bruit blanc. Le mot blanc prend son origine dans

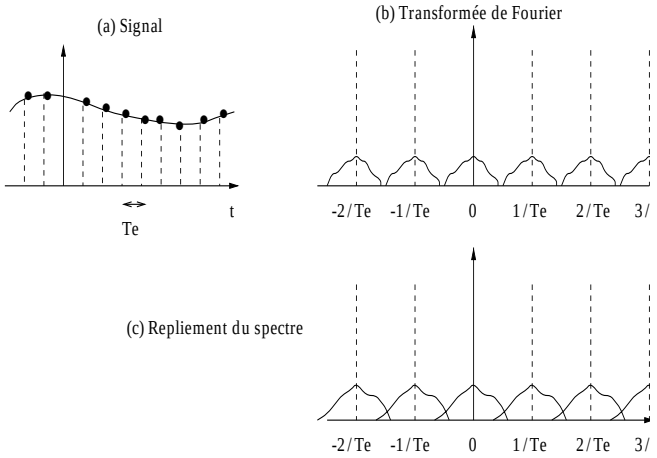


Figure 3.3: *Échantillonnage et transformée de Fourier.*
Le signal est représenté en (a) : il est échantillonné avec une période T_e. La transformée de Fourier du signal échantillonné est représentée en (b) : elle est périodique de période $f_e = 1/T_e$. Si le signal est constitué de périodes inférieures à $2T_e$, il y aura un repli du spectre autour des axes de symétrie $1/2T_e$ (c) ce qui va engendrer de "fausses" périodicités dans la partie $[-1/2T_e, 1/2T_e]$. Il faut donc choisir un échantillonnage tel que ce phénomène n'apparaisse pas. (b) est un exemple de transformation de Fourier d'un signal bien échantillonné.

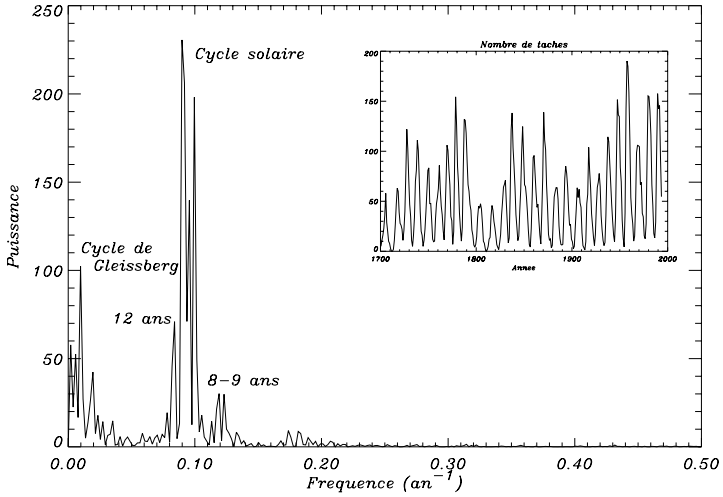


Figure 3.4: *Transformée de Fourier du nombre de Wolf.*
Il est possible de distinguer dans la transformée de Fourier du nombre de Wolf (dont les variations temporelles sont représentées dans le cadre à droite), le cycle de Gleissberg et le cycle solaire qui inclut des périodicités comprises entre 9 et 12 ans. Plusieurs pics sont présents autour de 11 ans, nous verrons au chapitre 5 qu'ils sont tous significatifs.

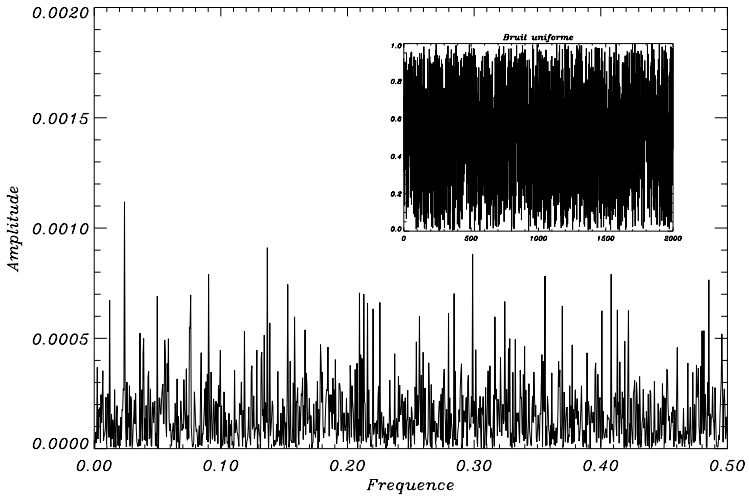


Figure 3.5: *Transformée de Fourier d'un bruit à distribution uniforme.*
Le bruit est représenté dans l'encadré de droite. L'amplitude des coefficients de Fourier est approximativement la même pour toutes les fréquences. C'est la caractéristique d'un bruit dit "blanc".

l'analogie avec la lumière blanche dont la puissance est répartie uniformément sur l'axe des fréquences.

La figure 3.6 indique que la représentation par Fourier est très mal adaptée à la représentation d'un signal dont la fréquence varie dans le temps. L'analyse par Fourier nécessite en effet une multitude de sinusoïdes localisées autour de la fréquence 1/27 afin de prendre en compte la variabilité de la période du signal dans le temps.

3.2.3 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\Phi_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(n) e^{-2i\pi nf} \tag{3.19}$$

Elle représente la répartition de la puissance sur l'axe des fréquences. Dans la théorie des processus aléatoires, cette définition constitue le théorème suivant.
Théorème de Wiener-Kintchine : *la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire dont la valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation sont invariantes dans le temps (stationnarité au sens large) est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation statistique.*

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \tag{3.20}$$

La densité spectrale de puissance est quadratique c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la phase du signal. De plus elle est toujours réelle et positive.

Lorsqu'un signal n'est pas déterministe, on se limite à une certaine durée d'observation, en essayant de la prendre telle que l'on ait toutes les variations possibles du signal. La notion de densité spectrale d'un signal déterministe est alors remplacée par celle de la

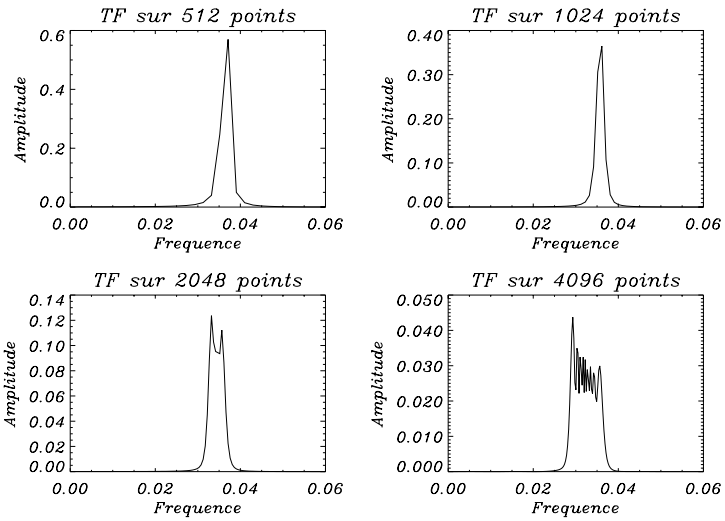


Figure 3.6: *Transformée de Fourier d'un signal à fréquence variable.*
Le signal temporel utilisé pour calculer ces transformées de Fourier est : $x(t) = \sin(2\pi t \frac{1}{27+0,001t})$. La fréquence de ce signal est donc variable. Les quatre dessins représentent 4 transformées de Fourier mais calculées sur les 512 premiers points du signal (a), puis sur les 1024 premiers points (b) et sur les 2048 premiers points (c) et enfin sur le signal dans son intégralité (d). La figure (a) montre l'existence d'un pic alors que la figure (d) montre l'existence d'une bande de fréquence très mal définie. La transformée de Fourier n'est pas l'outil adapté à l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps.

moyenne des densités spectrales obtenues sur plusieurs intervalles d'observations. On obtient alors un périodogramme.

3.2.4 Inconvénients de l'analyse de Fourier

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier son manque évident de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse utilisées sont des sinusoïdes qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure n'évolue pas ou peu (statistiquement stationnaires), mais devient un problème pour l'étude de signaux non stationnaires.

De plus ainsi que cela a été vu sur la figure 3.6 l'analyse de Fourier ne permet pas l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps. De tels signaux nécessitent la mise en place d'une analyse temps-fréquence qui permettra une localisation des périodicités dans le temps et indiquera donc si la période varie d'une façon continue, si elle disparaît puis réapparaît par la suite, etc.

Gabor dans les années 1940 découvre le première forme de représentation temps-fréquence. Sa technique consiste à découper le signal en différentes plages de longueur fixée. Chaque plage est alors étudiée séparément des autres par l'analyse traditionnelle de Fourier. L'inconvénient majeur de ce procédé est que la longueur de la plage étant fixée, il n'est pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps

sont différentes. Par exemple, une analyse à fenêtre glissante de la période de rotation du Soleil (27 jours environ) sur les données du nombre de Wolf ne permettra pas d'analyser en même temps les variations de la période du cycle solaire si les longueurs des plages sont de l'ordre de 2 à 3 ans.

Une autre méthode d'analyse qui ne privilégie aucune échelle particulière mais qui généralise à toutes les échelles l'analyse locale des fréquences obtenues par la méthode de Gabor est donc nécessaire. En 1982, Morlet ouvre la voie conduisant à la solution en construisant la transformation en ondelettes.

3.3 L'analyse en ondelettes

3.3.1 Ondelettes continues - définition

Pour obtenir de l'information à la fois temporelle et fréquentielle sur un signal $x(t)$, il faut le décomposer sur des fonctions concentrées à la fois en temps et en fréquence. Pour définir ces fonctions, il faut partir d'une fonction $\psi(t)$ appelée "ondelette mère" si elle est bien localisée et si elle est oscillante (elle ressemble à une onde, mais étant localisée, est une ondelette). La condition de localisation s'écrit sous la forme habituelle de décroissance en amplitude rapide quand $|t|$ augmente indéfiniment. La condition d'oscillation suggère que $\psi(t)$ vibre comme une onde : on demande donc que l'intégrale de $\psi(t)$ sur le temps soit nulle et qu'il en soit de même pour ses m premiers moments. La mère des ondelettes engendre les autres ondelettes de la famille, $\psi_{a,b}(t)$, $a > 0$ et b réel, par dilatation (paramètre a) et par translation dans le temps (paramètre b).

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right) \tag{3.21}$$

Le facteur de normalisation $1/\sqrt{a}$ peut être aussi pris égal à 1 ou à $1/a$.

Grossman et Morlet ont montré que si $\psi(t)$ est à valeurs réelles, cette collection peut être utilisée comme s'il s'agissait d'une base orthonormée. Cela signifie que tout signal d'énergie finie peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ et que les coefficients de cette combinaison sont, à un facteur de normalisation près, les produits scalaires :

$$C(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi\left(\frac{t \Leftrightarrow b}{a}\right) dt \tag{3.22}$$

Ces coefficients mesurent, en un certains sens, les fluctuations du signal $x(t)$ autour du point b à l'échelle fournie par a.

La transformée en ondelette est un opérateur linéaire, invariant par translation et par dilatation. Quelle que soit l'échelle et quel que soit l'endroit, l'analyse du signal se fait avec la même fonction.

Si la base engendrée par l'ondelette n'est pas orthogonale, on a une redondance d'informations et un risque d'instabilité lors de la reconstruction du signal analysé. Par ailleurs, la transformée en ondelette d'un signal n'est pas unique, elle dépend de l'ondelette mère utilisée.

Le traitement numérique des données nécessite la discrétisation de l'analyse en ondelettes. Il faut se donner un réseau de points de discrétisation. Le principal problème réside dans la reconstruction du signal. Il y a plusieurs manières de traiter ce problème.

Mallat, par exemple, introduit l'analyse multirésolution. D'une façon générale, les bases d'interpolation dans L^2 (espace des fonctions continuement dérivables) permettent de bien décrire l'analyse en ondelettes discrète. L'algorithme de transformation en ondelettes discrètes le plus simple consiste alors à convoluer le signal avec l'ondelette, en dilatant ou en contractant la forme de celle-ci, suivant l'échelle à laquelle on veut faire l'analyse.

3.3.2 Discrétisation de la transformée continue

On veut trouver une base orthonormale d'ondelettes dans laquelle il sera possible de décomposer le signal $s(t)$ appartenant à $L^2(R)$ (R est l'espace des réels). Pour cela, il faut utiliser l'analyse multirésolution dans $L^2(R)$. Une telle analyse consiste à utiliser une gamme très étendue d'échelles pour analyser le signal. A chaque échelle, le signal sera remplacé par l'approximation la plus adéquate que l'on puisse y tracer. En allant des échelles les plus grossières vers les échelles les plus fines, on accède à des représentations de plus en plus précises du signal donné. L'analyse s'effectue donc en calculant ce qui diffère d'une échelle à l'autre, c'est-à-dire les détails.

Une approximation de l'espace des fonctions de carrés sommables $L^2(R)$ consiste à le découper en une séquence de sous-espaces $(V_j)_{j\in Z}$. Ces sous-espaces ont un certain nombre de propriétés : ils forment une suite emboîtée, leur intersection[2] est réduite à $\{0\}$ et leur réunion[3] est dense dans $L^2(R)$. Chaque sous-espace est l'ensemble de toutes les approximations possibles d'un même signal à la résolution associée au sous-espace. Le signal à analyser sera approximé par une succession de projections orthogonales sur les sous-espaces V_j.

Il faut à présent trouver une base engendrant V_j. Soit la fonction $\phi(x)$ appartenant à $L^2(R)$ telle que $\phi(x \Leftrightarrow k)$ $(k \in Z)$ soit une base orthonormée dans $L^2(R)$. Soit V_0 le sous-espace vectoriel engendré par cette suite. V_j est défini à partir de V_0 par simple changement d'échelle :

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j \tag{3.23}$$

pour toute fonction f de $L^2(R)$. De plus, l'ensemble des fonctions $\sqrt{2}\,\phi_{j,k}(2^j x \Leftrightarrow k)$ est une base de V_j. La fonction ϕ est appelée fonction d'échelle ou fonction d'interpolation. L'échelle associée à la résolution j est $a_j = 1/2^j$. Le choix d'un facteur 2 correspond à une analyse diadique. Si on pose : $\phi_j(x) = 2^j\phi(2^j x)$, alors la famille $\sqrt{2^{-j}}\,\phi_{j,k}(x \Leftrightarrow 2^{-j}k)$ engendrée par translation (paramètre $2^{-j}k$) et par dilation (paramètre 2^{-j}) de ϕ est une base orthonormale.

Le passage d'une résolution $j+1$ à une résolution j se fait en projetant la fonction f_{j+1} appartenant à une base V_{j+1} sur un espace V_j dont les fonctions définies ci-dessus forment une base[4]. La projection f_j s'écrit sous la forme :

$$f_j(k) =< f(x), \phi(x \Leftrightarrow 2^{-j}k) > \tag{3.24}$$

Or $\phi(x \Leftrightarrow 2^{-j}k)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(x \Leftrightarrow 2^{-j}k) = 2^{-j-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \phi_j(u \Leftrightarrow 2^{-j}k), \phi_{j+1}(u \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) > \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) \tag{3.25}$$

[2]Quand la résolution devient de plus en plus grossière, l'approximation du signal contient de moins en moins d'information et finalement converge vers 0.

[3]Quand la résolution est infiniment fine, l'approximation du signal converge vers le signal lui-même.

[4]Cette analyse en multirésolution a été décrite par Mallat qui a choisi de descendre dans l'échelle des résolutions (de 0 à -1, -2, etc. ou aussi de $j+1$ à j, etc.)

D'où, après un changement de variable adéquat :

$$f_j(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \phi_{-1}(x), \phi_0(x \Leftrightarrow (l \Leftrightarrow 2k)) >< f(x), \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) > \tag{3.26}$$

Si $h(u) =< \phi_{-1}(x), \phi_0(x \Leftrightarrow u) >$, on a :

$$f_j(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l \Leftrightarrow 2k) f_{j+1}(l) \tag{3.27}$$

Pour son algorithme, Mallat considère une suite croissante de grille emboitées qui va de la grille la plus fine à la grille la plus grossière. Le signal à analyser est échantillonné sur la grille fine. Etant donné un signal original discret $f_0(k)$ (avec $1 \leq k \leq N$) son approximation $f_{-1}(k)$ (avec $1 \leq k \leq N/2$) est obtenue par convolution de f_0 et du filtre de réponse impulsionnelle h précédemment décrit en gardant un échantillon sur deux à la sortie du filtre. Cette procédure est itérée un certain nombre de fois.

Il est possible d'associer à h, précédemment décrit, un filtre discret H dont il est la réponse impulsionnelle. Si la transformation de Fourier discrète de ce filtre est notée $H(\nu)$, alors $H(\nu)$ doit vérifier les relations suivantes :

$$|H(0)| = 1 \tag{3.28}$$

$$|H(\nu)|^2 + |H(\nu + \frac{1}{2})|^2 = 1 \tag{3.29}$$

La transformée de Fourier de la fonction échelle ϕ associée au filtre H est alors donnée par :

$$\hat{\phi}(\nu) = \prod_{i=1}^{+\infty} H(2^{-j}\nu) \tag{3.30}$$

Le signal original est donc filtré par une suite de filtres passe-bas en cascade dont la fréquence de coupure décroît de moitié lorsque l'on passe de la résolution $j+1$ à la résolution j (figure 3.7).

3.3.3 Algorithme de Mallat

L'algorithme de Mallat décrit une transformation en ondelettes discrètes en utilisant l'analyse multirésolution.

Les fluctuations du signal entre deux échelles sont notées $d_j(x)$ et définies par $d_j(x) = f_{j+1}(x) \Leftrightarrow f_j(x)$. Pour analyser plus finement ces détails, on désigne par W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Alors il existe au moins une fonction $\psi(x)$ appartenant à W_0 et telle que $\psi(x \Leftrightarrow k)$ $(k \in Z)$ soit une base orthonormée de W_0. L'ensemble $\sqrt{2^{-j}}\psi_{j,k}(x \Leftrightarrow 2^{-j}k)$ doit former une base de W_j. Il est alors possible de décomposer toute fonction de W_j sur V_{j+1} :

$$\psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}k) = 2^{-j-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}k), \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) > \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) \tag{3.31}$$

Par changement de variables on a :

$$2^{-j-1} < \psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}k), \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) >=< \psi_{-1}(x), \phi_0(x \Leftrightarrow (l \Leftrightarrow 2k)) > \tag{3.32}$$

En posant :

$$g(u) =< \psi_{-1}(x), \phi_0(x \Leftrightarrow u) > \tag{3.33}$$

g est la réponse impulsionnelle du filtre discret associé G. L'expression des fluctuations est alors :

$$d_j(k) =< f(x), \psi_{j,k}(x \Leftrightarrow 2^{-j}k) >= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(l \Leftrightarrow 2k) < f(x), \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}l) > \tag{3.34}$$

Les détails à une échelle donnée sont donc des combinaisons linéaires des "fluctuations élémentaires" que sont les ondelettes rapportées à cette échelle.

La fonction ψ est liée, par sa transformée de Fourier, à la transformée de Fourier de la fonction d'échelle ϕ par :

$$\hat{\psi}(\nu) = G(\frac{\nu}{2})\hat{\phi}(\frac{\nu}{2}) \tag{3.35}$$

où :

$$G(\nu) = \bar{H}(\nu + \frac{1}{2})e^{-2i\pi\nu} \tag{3.36}$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient donc :

$$g(n) = (\Leftrightarrow 1)^{n-1}h(1 \Leftrightarrow n) \tag{3.37}$$

avec $n \in Z$. Le filtre G est donc un filtre passe-haut ayant la même fréquence de coupure que le filtre H. G et H sont appelés des filtres miroirs conjugués, la relation de quadrature étant définie par (3.36). Ces deux filtres sont efficaces pour calculer la décomposition d'un signal dans une base orthonormée d'ondelettes. Le signal à analyser y est représenté par un ensemble de détails d_j et une approximation qui correspond à la dernière résolution (figure 3.7) : c'est ce qui est appelé la représentation en ondelettes du signal.

Reconstruction

Le signal de départ peut être reconstruit à partir de sa pyramide. Puisque W_j et V_j sont complémentaires dans V_{j+1}, $(\sqrt{2^{-j}}\phi_{j,k}(x \Leftrightarrow 2^{-j}k), \sqrt{2^{-j}}\psi_{j,k}(x \Leftrightarrow 2^{-j}k))$ forment une base orthogonale de V_{j+1}. On peut donc décomposer ϕ_{j+1} au point $(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}k)$ sur cette base :

$$\begin{aligned}\phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}k) &= 2^{-j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \phi_j(u \Leftrightarrow 2^{-j}l), \phi_{j+1}(u \Leftrightarrow 2^{-j-1}k) > \phi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l) \\ &\quad +2^{-j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \psi_j(u \Leftrightarrow 2^{-j}l), \phi_{j+1}(u \Leftrightarrow 2^{-j-1}k) > \psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l)\end{aligned}$$

Soit encore (après changement de variables) :

$$\phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}k) = 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(l \Leftrightarrow 2k)\phi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l) + \tilde{g}(l \Leftrightarrow 2k)\psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l) \tag{3.38}$$

où $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sont les filtres duaux de h et de g, tels que $\tilde{h}(x) = h(\Leftrightarrow x)$ et $\tilde{g}(x) = g(\Leftrightarrow x)$. Le passage d'une résolution à une autre se fait en prenant le produit scalaire :

$$\begin{aligned}< f(x), \phi_{j+1}(x \Leftrightarrow 2^{-j-1}k) &= 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(l \Leftrightarrow 2k) < f(x), \phi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l) > + \\ &\quad 2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(l \Leftrightarrow 2k) < f(x), \psi_j(x \Leftrightarrow 2^{-j}l) >\end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f_{j+1}(k) = 2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(l \Leftrightarrow 2k) f_j(l) + \tilde{g}(l \Leftrightarrow 2k) d_j(l) \tag{3.39}$$

La fonction est donc reconstruite en mettant des zéros entre chaque échantillon de f_j et de d_j et en convoluant les signaux obtenus par les filtres $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ respectivement (figure 3.7).

Ondelettes biorthogonales

La reconstruction du signal est exacte si on utilise des bases ondelettes biorthogonales qui sont une généralisation des bases d'ondelettes orthogonales. Dans ce cas, on a deux espaces W_j et $\tilde{W}_j$, pour le calcul des coefficients en ondelettes, le premier étant utilisé pour la transformation et le second pour la reconstruction. Les fonctions ψ_j et $\tilde{\psi}_j$, représentant deux bases non orthogonales de ces espaces, sont duales et la décomposition en ondelettes biorthogonales d'un signal f s'écrit :

$$f = \sum_j < f, \psi_j > \tilde{\psi}_j \tag{3.40}$$

L'analyse en multirésolution est elle aussi caractérisée par deux espaces V_j et $\tilde{V}_j$ dont les fonctions ϕ_j et $\tilde{\phi}_j$ forment des bases non orthogonales. Ces espaces doivent vérifier certaines propriétés : les espaces $\tilde{V}_j$ et W_j sont orthogonaux, de même que $\tilde{W}_j$ et V_j ; les espaces V_j et W_j sont complémentaires et forment V_{j-1}, de même que $\tilde{V}_j$ et $\tilde{W}_j$ qui forment $\tilde{V}_{j-1}$.

Si les filtres h, $\tilde{h}$, g et $\tilde{g}$ sont associés respectivement aux fonctions ϕ, $\tilde{\phi}$, ψ et $\tilde{\psi}$, la restauration est faite par :

$$f_{j+1}(k) = 2 \sum_l f_j(l) \tilde{h}(l \Leftrightarrow 2k) + d_j(l) \tilde{g}(l \Leftrightarrow 2k) \tag{3.41}$$

Dans le cas de ces bases duales, la relation de quadrature devient :

$$H(\nu)\tilde{H}(\nu) + G(\nu)\tilde{G}(\nu) = 1 \tag{3.42}$$

3.3.4 Algorithme à trous

L'algorithme à trous est un algorithme très général et valable pour toute interpolation emboîtée. En effet, à partir d'une interpolation linéaire, on peut montrer qu'il est possible de calculer de manière exacte la transformée en ondelettes d'une fonction connaissant ses coefficients d'interpolation à l'échelle 1 d'échantillonnage. Cette hypothèse s'écrit :

$$f_1(k) =< f(x), \phi(x \Leftrightarrow k) > \tag{3.43}$$

où $f(x)$ est la fonction originale, et $f_1(k)$ les valeurs initiales, produit scalaire de $f(x)$ avec la base échantillonnée au pas 1. Dans la théorie classique d'échantillonnage, la fonction $\phi(x)$ est égale à $sinc(x)$. Les coefficients de l'approximation lissée du signal à l'échelle i s'écrivent :

$$f_i(k) = \frac{1}{2^i} < f(x), \phi\left(\frac{x \Leftrightarrow k}{2^i}\right) > \tag{3.44}$$

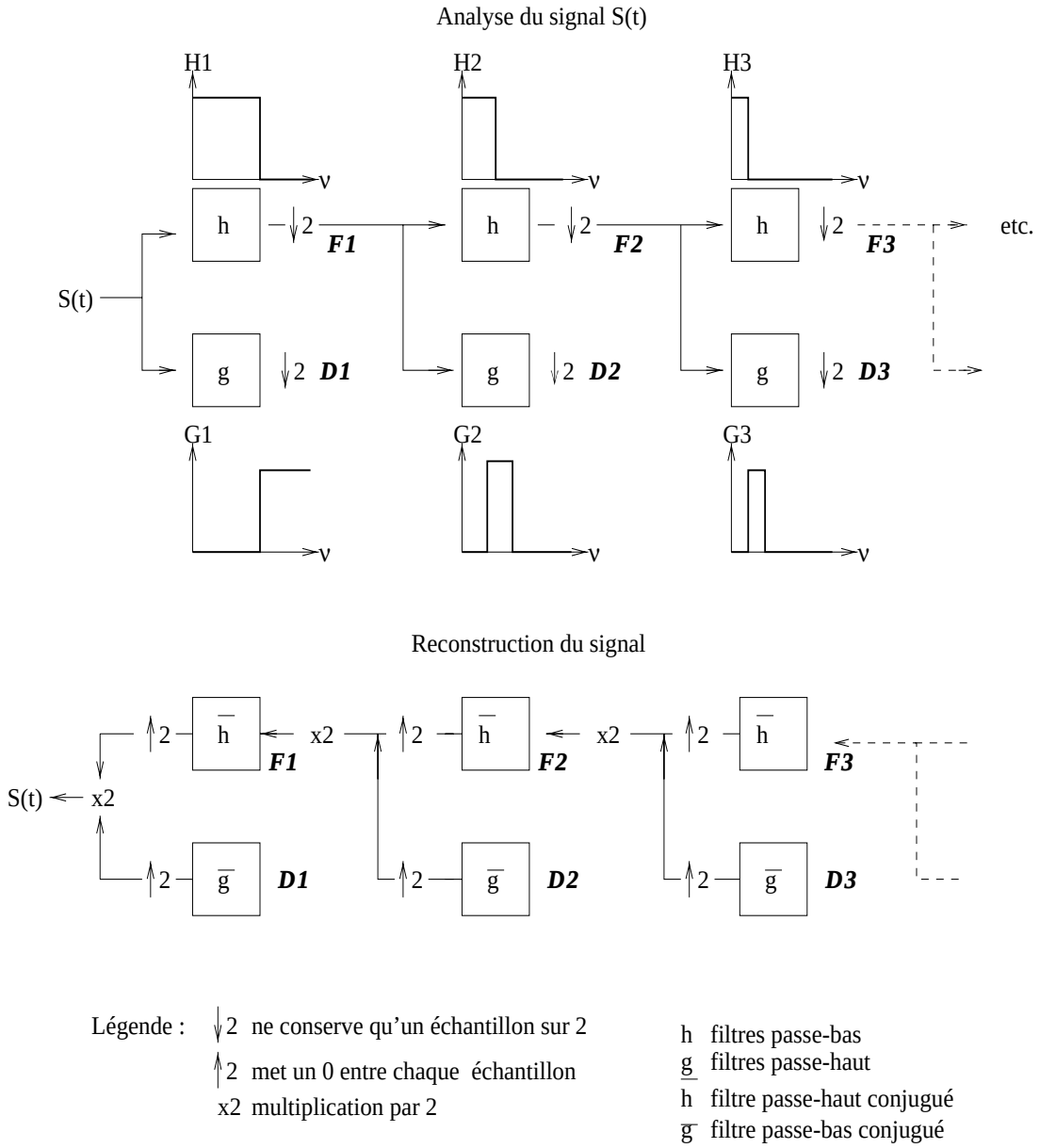


Figure 3.7: *Algorithme de Mallat.*
Le schéma du haut représente l'analyse d'un signal $S(t)$ par l'algorithme de Mallat. Les F_i sont les signaux "lissés" résultant de la convolution du signal à la résolution précédente par le filtre h. Les D_i sont les coefficients d'ondelette du signal aux différentes échelles. Le schéma du bas représente la reconstruction du signal de départ à partir de ses coefficients en ondelettes et des signaux "lissés".

Si $\phi(x)$ engendre une base d'interpolation emboîtée, on a :

$$\frac{1}{2^i}\phi\left(\frac{x \Leftrightarrow k}{2^i}\right) = \frac{1}{2^{i-1}}\sum_n h(n)\phi\left(\frac{x \Leftrightarrow k}{2^{i-1}} \Leftrightarrow n\right) \tag{3.45}$$

Le calcul de $f_i(k)$ devient donc :

$$f_i(k) = \sum_n h(n) f_{i-1}(k + 2^{i-1}n) \tag{3.46}$$

On a donc une convolution avec le filtre symétrique h et avec un pas entre éléments de 2^{i-1} créant des trous, d'où le nom de l'algorithme.

Les coefficients en ondelettes à l'échelle i sont obtenus par :

$$d_i(k) =< f(x), \frac{1}{2^i}\psi\left(\frac{x \Leftrightarrow k}{2^i}\right) > \tag{3.47}$$

Si l'ondelette $\psi(x)$ est choisie comme étant le résultat de la différence de deux interpolations, alors les coefficients en ondelettes sont donnés par :

$$d_i(k) = f_{i+1}(k) \Leftrightarrow f_i(k) \tag{3.48}$$

Une seule convolution est donc effectuée par échelle.

La reconstruction est effectuée en sommant tous les coefficients en ondelettes obtenus et l'approximation à la dernière échelle du signal (notée $f_N(k)$) :

$$f_1(k) = f_N(k) + \sum_n d_n(k) \tag{3.49}$$

Cependant, le calcul de la transformée en ondelettes du signal reconstruit (par la méthode donnée par l'équation (3.49)) ne donne pas les mêmes coefficients en ondelette que la transformée du signal original. Par conséquent, on applique un algorithme itératif à la transformée inverse afin qu'au bout de quelques itérations, la transformée du signal original soit égale à celle du signal reconstruit. Il est possible d'utiliser l'algorithme d'inversion de Van Cittert pour reconstruire le signal.

L'avantage de l'algorithme à trou par rapport à l'algorithme de Mallat est qu'il permet le calcul de la transformée sur l'ensemble des abcisses. En revanche, cet avantage est aussi un inconvénient puisque la relation signal original - signal transformé n'est pas bi-univoque, ce qui implique que la reconstruction du signal original à partir de ces coefficients et signaux transformés n'est pas exacte.

3.3.5 Quelques exemples

L'ondelette utilisée pour les exemples ci-dessous est celle de Morlet :

$$g(t) = e^{i\omega_0 t}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_0^2}} \tag{3.50}$$

Un terme correctif est normalement ajouté à l'équation, mais ce terme devient négligeable pour $(\sigma_0\omega_0) > 5$. Le paramètre σ_0 est proportionnel à la largeur à mi-hauteur de l'ondelette, et ω_0 décrit le nombre d'oscillations (c'est-à-dire la période) de l'ondelette. Le signal est convolué avec la partie réelle et la partie imaginaire de l'ondelette ; les diagrammes "temps-fréquence" représentent l'évolution du module de la transformée en ondelette pour diverses échelles.

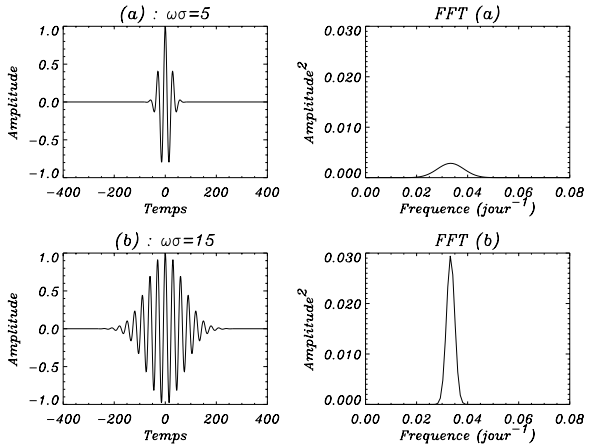


Figure 3.8: *Ondelette de Morlet.*
Deux ondelettes de même période sont représentées, mais la largeur à mi-hauteur de la seconde est trois fois plus grande que celle de la première. Le spectre correspondant aux ondelettes est dessiné à droite.

Illustrations de la notion de localisation en temps et en fréquence

La première figure (figure 3.8) représente une ondelette de Morlet pour deux valeurs du produit $(\omega_0\sigma_0)$. En fait, c'est le paramètre σ_0 qui change, puisque la puissance des deux spectres est centrée autour de la même fréquence. Cette variation dans le paramètre délocalise un peu l'ondelette puisque le nombre d'oscillations est plus grand. En revanche, ce dernier point a pour effet bien évident d'augmenter la résolution en fréquence.

La figure suivante (figure 3.9) illustre l'effet de la dilatation de l'ondelette de Morlet dans le domaine fréquentiel. Le nombre d'oscillations restant le même, l'ondelette s'étent davantage, la résolution temporelle est donc moins bonne. Cette dilatation équivaut à un changement de fréquence, ce qui se note sur les représentations des transformées de Fourier de ces ondelettes (à droite) : le pic de puissance est chaque fois centré sur la fréquence correspondant à celle de l'ondelette. Ces figures indiquent que la perte de résolution temporelle se fait au profit de la résolution fréquentielle.

Au paragraphe 3.2.2 il a été vu que la transformée de Fourier avait du mal à analyser un signal dont la fréquence variait dans le temps (se reporter à la figure 3.6). La figure 3.10 représente sur le dessin du haut la variation temporelle de la période de ce signal et sur celui du bas son diagramme en ondelettes. En ordonnées du diagramme en ondelettes sont portées les périodes correspondant aux diverses dilatations de l'ondelette pour lesquelles l'analyse a été faite. Le temps est porté en abcisse. On voit donc les courbes de niveau des variations du module de la transformée en ondelettes. Ces courbes indiquent que la période varie de 28 à 35 jours environ alors que sa variation a été fixée entre 27 et 31 jours (voir le schéma du haut de la figure 3.10). Le module de la transformée en ondelette n'est pas sensible à la fréquence instantanée mais à la pente des variations qu'elle admet (c'est-à-dire à sa dérivée). Il est par conséquent difficile de donner des valeurs aux périodicités qui peuvent ressortir dans ce genre de diagramme. Il est en revanche possible de dire si la période évolue dans le temps ou si elle disparaît ou réapparaît brusquement.

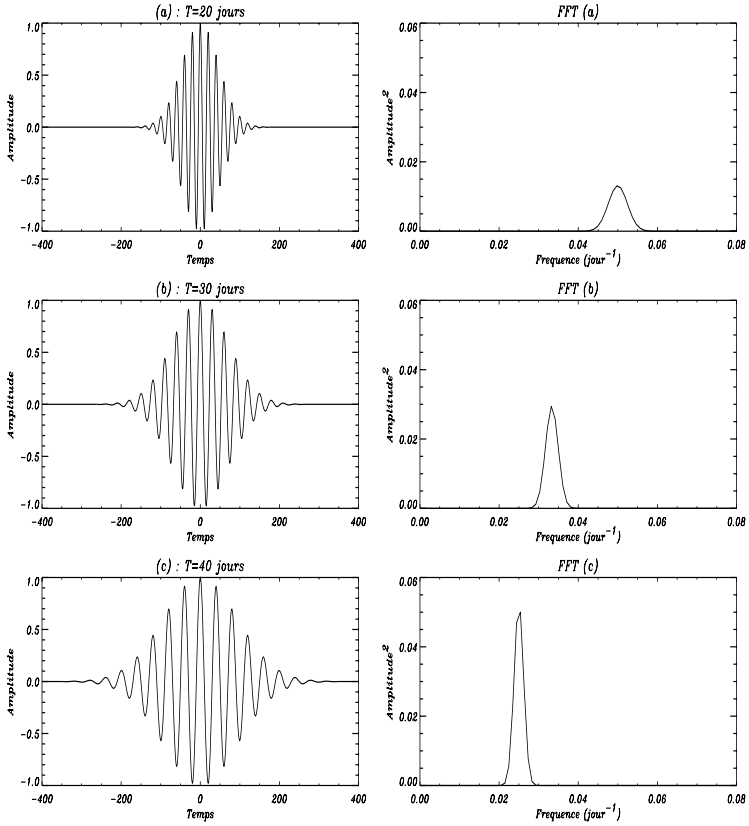


Figure 3.9: *Effet de la dilatation de l'ondelette de Morlet.*
La même ondelette est représentée sur les trois dessins de gauche, mais elle est dilatée d'un dessin à l'autre. La dilatation de la première correspond à une période de 20 jours, celle de la seconde à une période de 30 jours, et celle de la dernière à une période de 40 jours. La puissance des spectres de ces ondelettes est donc centrée à chaque fois sur la fréquence correspondante. Une perte de localisation dans le temps (de haut en bas, car l'ondelette se dilate) entraine une augmentation de la résolution dans le domaine fréquentiel, ainsi qu'une augmentation de la puissance (si les transformées de Fourier sont faites sur le même nombre de points à chaque fois bien entendu).

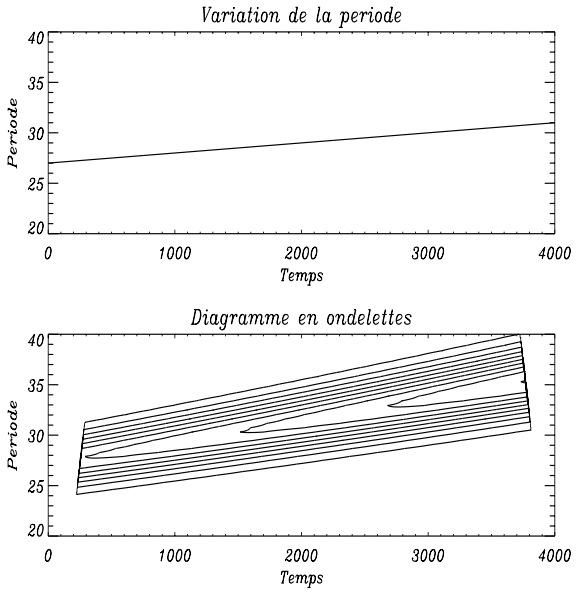


Figure 3.10: *Diagramme en ondelettes d'un signal dont la fréquence varie dans le temps.*
Le signal de la figure 3.6 est analysé par les ondelettes. La variation de la période en fonction du temps est représentée sur le dessin du haut. En bas, le diagramme en ondelette représente l'évolution temporelle (abcisses) du module de la transformée en ondelette en fonction de la période (ordonnées) exprimée en jours. Les variations dans le module montrent que la période du signal varie entre 28 et 35 jours environ alors que le schéma du haut montre une variation réelle comprise entre 27 et 31 jours. En effet c'est la dérivée de la phase de la transformée en ondelettes qui est sensible à la fréquence instantanée, le module lui est sensible à la pente c'est-à-dire à la dérivée de la fréquence.

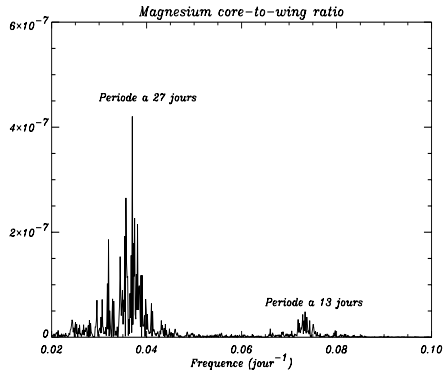


Figure 3.11: *Transformée de Fourier du rapport centre-bord du magnésium II.*
La transformation de Fourier indique l'existence d'une bande de fréquences contenant de l'énergie autour de la périodicité à 27 jours et autour de celle à 13 jours. L'énergie de cette dernière est cependant bien plus faible.

Application : étude de la variation de la période de rotation du Soleil

Il a été vu dans le chapitre 2 que la surface solaire (et la zone convective d'après les résultats des mesures d'héliosséismologie) tourne plus vite à l'équateur (période de 25 jours) qu'aux pôles (période de 35 jours environ). De plus, différents indices ne donnent pas la même période de rotation pour une même latitude héliographique. Certains indicateurs de l'activité solaire (tels les trous coronaux par exemple) ont une rotation pratiquement rigide.

La transformation de Fourier de l'indice du rapport centre-bord de la raie du magnésium (figure 3.11) montre de la puissance autour de la période de 27 jours et autour de la période de 13 jours. Cet indice a été choisi pour présenter la large distribution d'énergie autour de ces fréquences car il est reconnu pour avoir une périodicité à 27 jours très marquée. Cette distribution d'énergie indique que la période varie dans le temps, mais la transformée de Fourier ne peut fournir d'indications quant à ces variations. Il est possible de faire plusieurs transformées de Fourier en découpant la série temporelle en tranches. C'est ce qui est représenté sur la figure 3.12. On remarque qu'effectivement la période change suivant la phase du cycle de 11 ans dans laquelle est effectuée la transformée de Fourier. Rappelons que le maximum du cycle 21 se situe autour de 1979-1980, le mininum du cycle 21 est atteint en 1985, puis le cycle 22 est à son maximum en 1989-1990 et le minimum suivant se situe autour de 1996. Il est remarquable, par exemple, qu'en 1985-1986, il n'y ait qu'un seul pic dans la transformée de Fourier qui se situe pour une période de 26,6 jours. Les autres graphiques montrent en revanche une diversité de pics dont on ne sait pas si les périodes correspondantes sont toutes présentes dans les données ou si elles apparaissent l'une après l'autre. Une analyse en ondelettes est par conséquent nécessaire.

L'étude de la variation de la période de rotation du Soleil par une analyse en ondelettes a donc été menée pour différents indicateurs de l'activité regroupés dans le tableau 3.1. La couche atmosphérique à laquelle ils appartiennent est aussi notée. L'échelle de hauteur qui est ainsi balayée par ces différents indices va donc de la photosphère à la basse couronne. La question posée est la suivante : comment évolue la période de rotation au cours du cycle ?, et est-ce que cette évolution est la même pour tous les indices analysés qui sont pourtant issus de différentes couches de l'atmosphère ?

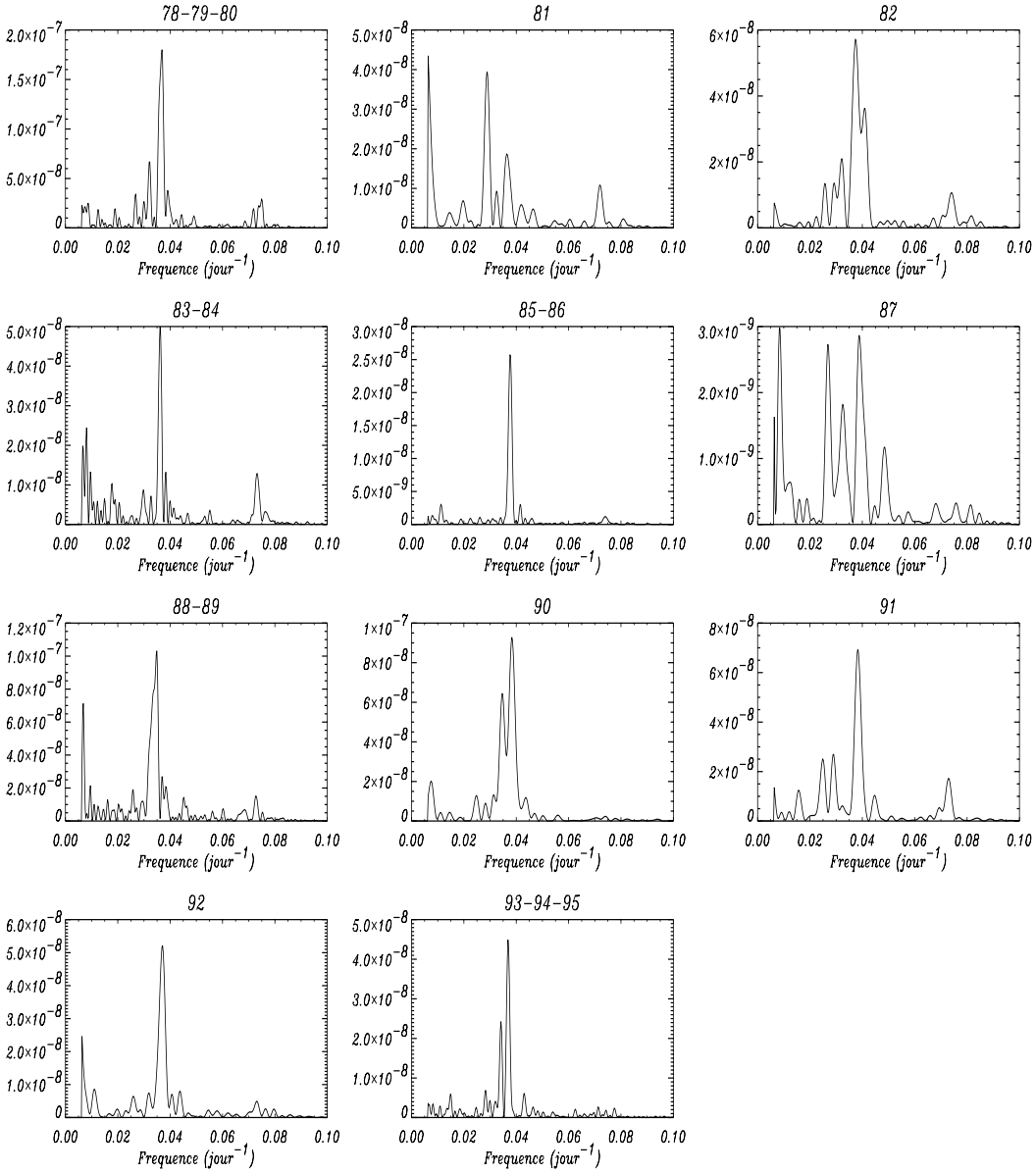


Figure 3.12: *Transformées de Fourier du rapport centre-bord du magnésium II.*
La série temporelle a été découpée en plusieurs tranches (dont le début et la fin sont indiqués dans le titre de chaque dessin). Une transformée de Fourier a été effectuée sur chacune de ces tranches. Il n'existe pas de périodicité à 27 jours qui soit stable mais plutôt un ensemble de périodes apparaissant et disparaissant suivant la phase du cycle solaire. Ces périodes sont comprises entre 25 et 30 jours environ.

Nom	dates	origine
Nombre de Wolf	janvier 1974 à mai 1995	photosphère
Champ magnétique	janvier 1977 à avril 1992	photosphère
PSI (Photometric Sunspot Index)	novembre 1978 à février 1993	photosphère
Nimbus-7/ERB	novembre 1978 à janvier 1993	photosphère
SMM/ACRIM I	février 1980 à mai 1989	photosphère
magnesium core-to-wing ratio	novembre 1978 à janvier 1995	basse chromosphère
Hélium neutre	janvier 1980 à janvier 1993	haute chromosphère
Flux radio à 10.7 cm	janvier 1960 à janvier 1993	basse couronne

Table 3.1: *Indices de l'activité ayant été analysés par ondelettes.*
Le champ magnétique est le champ intégré sur tout le disque (mesuré au "National Solar Observatory" à Kitt-Peak). L'irradiance totale a été mesurée par ACRIM (Active Cavity Radiometer Irradiance Monitoring) à bord du satellite SMM (Solar Maximum Mission) et par ERB (Earth Radiation Budget) à bord du satellite Nimbus-7. L'indice du MgII c/w (core-to-wing ratio) est une composition de plusieurs mesures faites à bord de 2 satellites différents mais par le même type d'appareil (voir le chapitre 6). Le flux radio est quant à lui mesuré depuis la Terre.

L'analyse a été faite avec une ondelette de Morlet pour des périodes variant de 20 à 40 jours. L'ondelette a été choisie telle qu'il y ait un bon compromis entre la résolution en fréquence et temporelle. Ce compromis s'obtient après plusieurs essais avec différentes ondelettes. La meilleure ondelette est celle qui a un nombre d'oscillations grand (pour une "bonne" résolution fréquentielle) mais pas trop (pour ne pas avoir de pertes en résolution temporelle). Les résultats sont représentés sur les figures 3.13 à 3.18. Les cycles solaires 21 et 22 ont été séparés de façon à ce que les graphiques soient plus clairs. La période (exprimée en jours) est donnée en ordonnée de chacune des figures, le temps est porté en abcisse. On remarque sur ces diagrammes en ondelettes l'existence de petits cercles disséminés un peu partout. Ce sont des artéfacts dus aux discontinuités présentes dans le signal qui sont mal interprétées par l'ondelette de Morlet. Les structures significatives de ces diagrammes sont remarquables d'une part parce qu'elles forment des sortes d'ilôts, d'autre part parce qu'en général elles se retrouvent sur tous les diagrammes.

Analyse du cycle 21 Les figures 3.13 et 3.14 représentent les diagrammes en ondelettes des indices photosphériques. Ces indices sont principalement relatifs aux champs magnétiques forts des taches. La figure 3.15 est composée de diagrammes en ondelettes d'indices d'origine chromosphérique et coronale.

Le PSI est relativement difficile à analyser car les données fluctuent beaucoup. Il est difficile d'y trouver des périodicités. Une structure autour de la période à 28 jours est cependant visible en 1981.

Il est tout aussi difficile de trouver des structures dans les diagrammes de l'irradiance totale (figure 3.14). Le diagramme en ondelettes de Nimbus-7/ERB présente tout de même une structure centrée autour de 38 jours en 1981 et une autre centrée autour de 31 jours en 1982. Cette dernière se retrouve dans le diagramme de l'irradiance totale mesurée par ACRIM I. C'est d'ailleurs la seule qui soit réellement significative dans ce diagramme. Si ces structures existent dans le diagramme en ondelettes du PSI, il est étonnant de pas

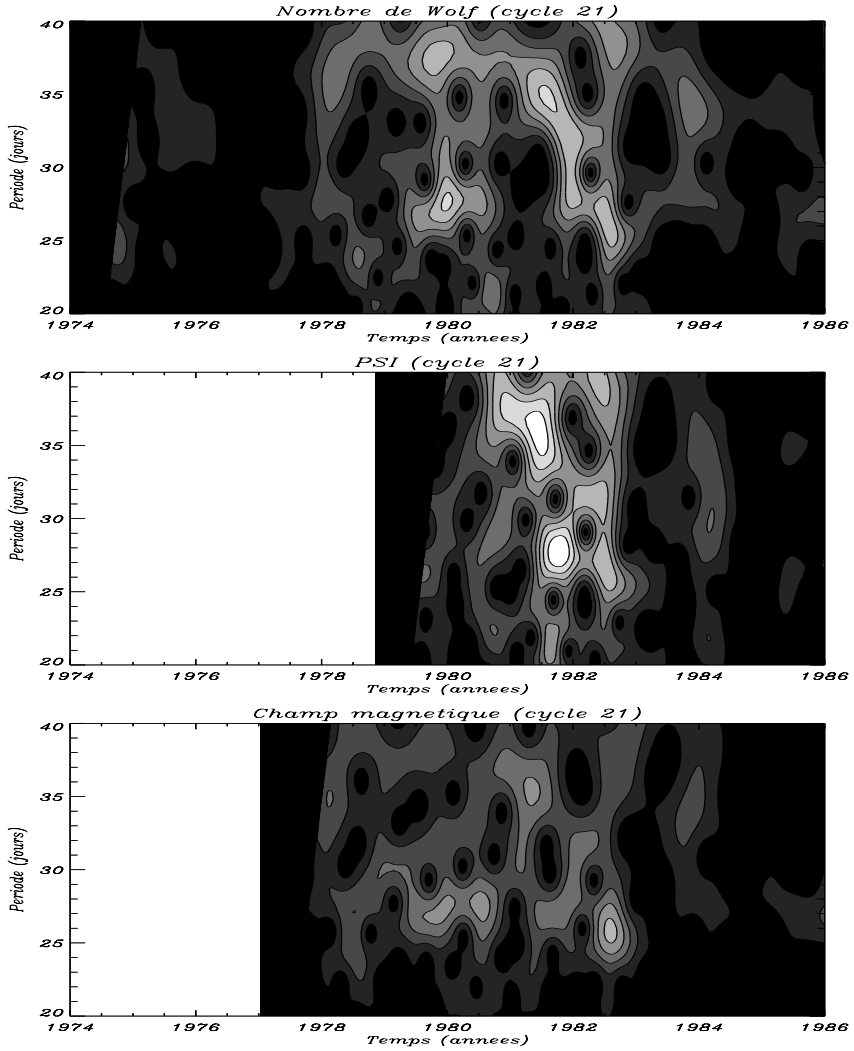


Figure 3.13: *Diagramme en ondelettes pour les indices relatifs à une forte activité magnétique de surface et pour le cycle solaire 21.*

en trouver trace dans ceux des taches et du champ magnétique. C'est probablement parce que l'effet des taches sur l'irradiance est relativement complexe et qu'entre autre il est fonction de l'âge de la tache. Ceci pourrait introduire des périodicités qui ne seraient pas visibles dans les indicateurs de champs magnétiques globaux.

Lorsque l'irradiance est corrigée de l'effet des taches par ajout du PSI, les diagrammes en ondelette deviennent relativement plus structurés. Les structures visibles précédemment ont disparu. Il est possible d'en conclure qu'elles étaient dues au passage des taches sur le disque. L'ajout du PSI supprime donc les effets des champs magnétiques forts des taches et permet de révéler ceux des champs magnétiques hors taches (forts ou faibles). De nouvelles structures apparaissent donc. Dans le diagramme de ERB + PSI on trouve notamment une structure centrée autour de 29 jours en 1980, que l'on voit apparaître sur le bord du diagramme pour ACRIM + PSI. Cette structure est aussi présente dans le diagramme du champ magnétique mais pour une périodicité de 28 jours. Une autre structure est visible autour de 28 jours en milieu d'année 1981 dans les deux diagrammes de l'irradiance corrigée par le PSI. Il est relativement curieux de trouver la même structure

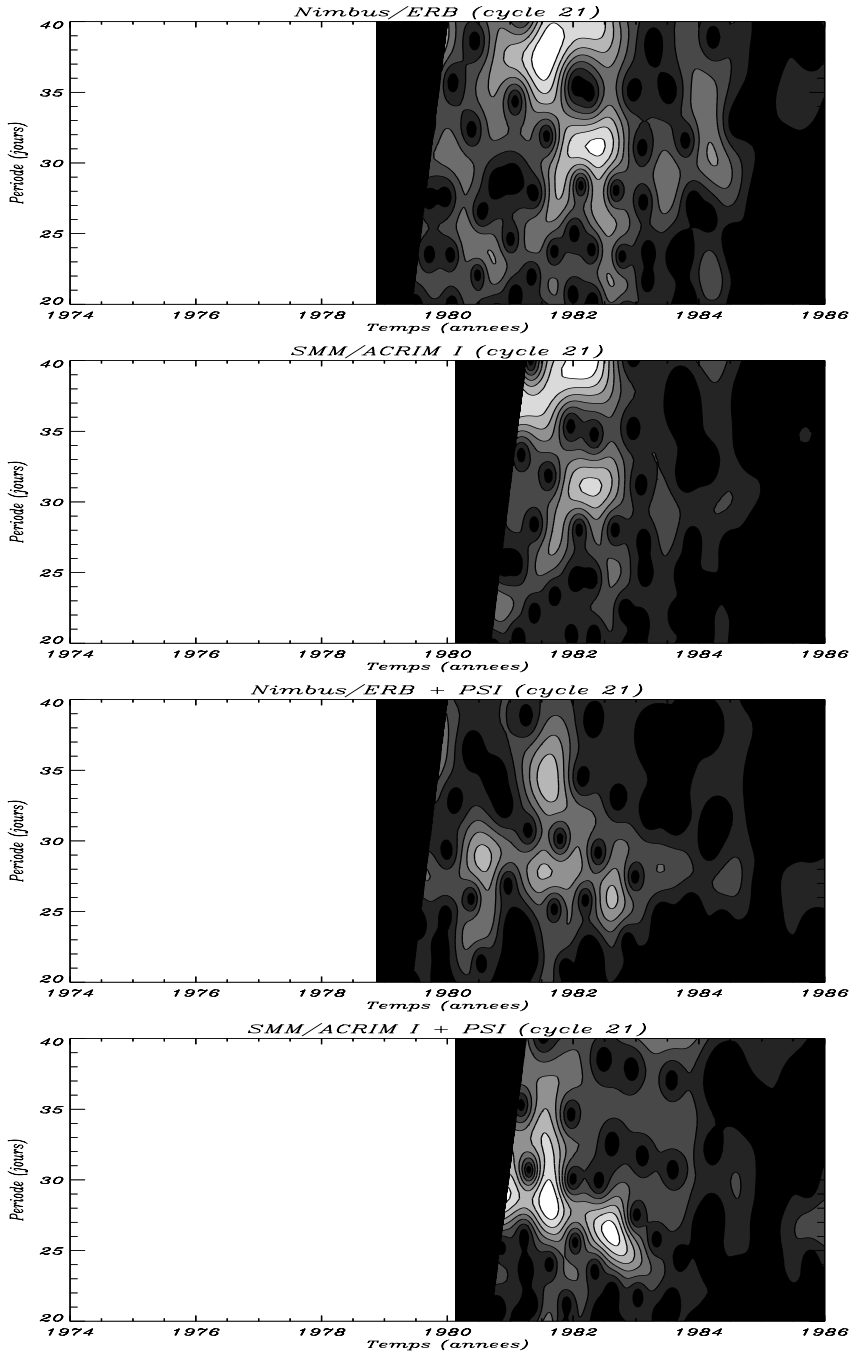


Figure 3.14: *Diagramme en ondelettes pour les indices relatifs à l'irradiance photosphérique et à cette dernière corrigée de l'effet des taches, pour le cycle solaire 21.*

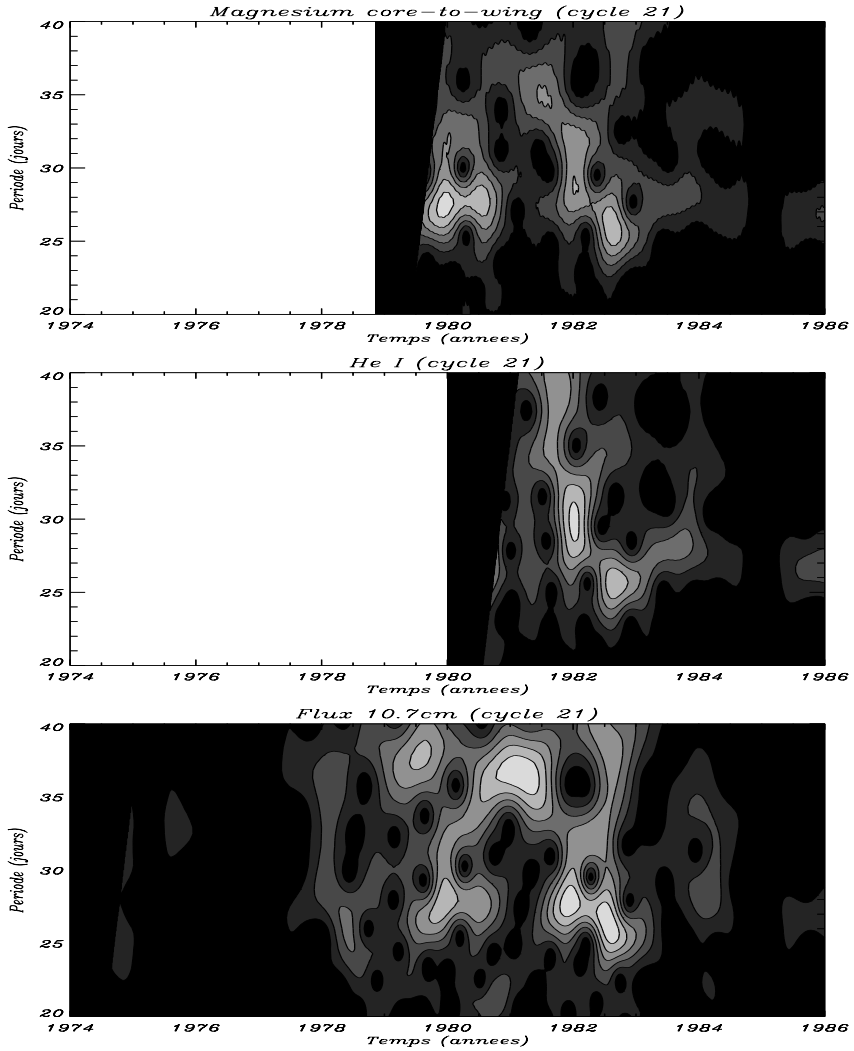


Figure 3.15: *Diagramme en ondelettes pour les indices chromosphériques (Mg II c/w et He I) et pour le flux à 10.7 cm originaire de la basse couronne, lors du cycle solaire 21.*

dans le diagramme du PSI et de la voir très faiblement dans celui du champ magnétique. Peut-être est-ce le PSI qui induit cette structure par une correction inadaptée due aux approximations qui sont faites dans le calcul de cet indice.
Toujours en milieu d'année 1981, le diagramme de ERB + PSI indique l'existence d'une structure centrée autour de 35 jours qui se retrouve elle aussi dans le diagramme du PSI. Enfin, une structure centrée autour de 26 jours est visible sur les deux diagrammes de l'irradiance corrigée en 1982. Cette structure apparaît aussi dans le diagramme des taches, du PSI et dans celui du champ magnétique. On constate que ces structures centrées autour de 28 et 26 jours respectivement en 1981 et 1982 étaient en fait visibles sur les diagrammes de l'irradiance non corrigée mais qu'elles étaient englobées dans les deux bras d'une structure plus large (de 31 jours en 1982 sur les diagrammes de ACRIM et ERB) se rattachant à celle supprimée lors de l'ajout du PSI.

Les diagrammes du MgII c/w et du flux à 10.7 cm montrent l'existence d'un groupe de deux structures, la seconde englobant la première, centré autour de 28 jours à la fin de 1980 et début de 1981 et en 1981. Ce groupe est aussi présent dans le diagramme du champ magnétique mais seule la première structure est visible sur le diagramme des taches. Il serait peut-être un peu prématuré de conclure que la première structure est due à la présence des champs magnétiques forts des taches et la seconde à celle de champs magnétiques hors taches. Cependant, l'analyse précédente des diagrammes de l'irradiance corrigée de l'effet des taches irait dans ce sens aussi, puisque la seconde structure est apparue lorsque le PSI a été ajouté aux données.

Un second groupe de deux structures distinctes mais rattachées l'une à l'autre, est visible en 1982 : le premier apparaît à la fin de 1981, le deuxième, au milieu de l'année 1982 (autour d'une période de 26 jours). La première structure est localisée autour d'une période de 30 jours pour les indices chromosphériques (Mg II et He I) et autour d'une période de 28 jours pour le flux à 10.7 cm. Cette première structure est plutôt centrée autour de 28 jours sur les diagrammes de l'irradiance corrigée du PSI. La seconde structure est présente dans le diagramme des taches, du PSI et du champ magnétique. Faut-il conclure que cette dernière est due à la forte activité magnétique des taches dont les effets se retrouvent dans toute l'atmosphère solaire ? Si tel est le cas, le PSI a été incapable d'en corriger les conséquences sur l'irradiance puisque cette structure est présente sur les diagrammes de l'irradiance corrigée par ajout du PSI. Quant à la première structure de ce groupe, elle serait due aux effets du champ magnétique hors taches ; si elle apparait faiblement dans le diagramme du champ magnétique, il est fort curieux qu'elle se trouve bien présente dans celui du PSI. Par conséquent, soit le PSI induit une correction inadaptée, soit la correction est adéquate mais, pour des raisons non évidentes, ces forts champs magnétiques sont peu visibles sur le diagramme du champ magnétique intégré sur tout le disque.

Tous ces diagrammes montrent donc que la périodicité correspondant aux structures significatives évolue avec le temps : elle est plus grande au maximum du cycle (les phénomènes actifs apparaissent aux latitudes héliographiques voisines de 35 à 40°) et diminue lorsque l'on se rapproche du minimum puisque les centres actifs se déplacent vers l'équateur.

Durant le minimum du cycle, une seule structure est visible quel que soit le diagramme : on distingue en 1985-1986 un ilôt de très faible amplitude autour d'une période de 26 jours.

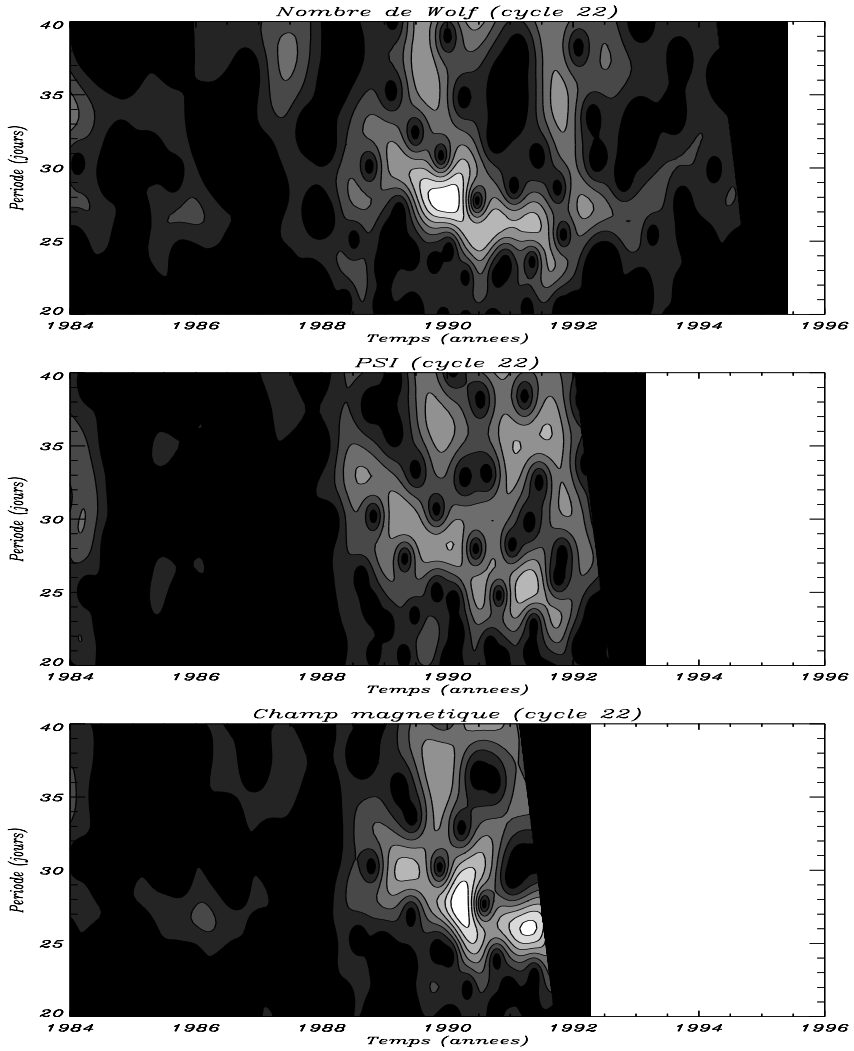


Figure 3.16: *Diagramme en ondelettes pour les indices relatifs à une forte activité magnétique de surface et pour le cycle solaire 22.*

Analyse du cycle 22 Les diagrammes en ondelettes des indices pour le cycle 22 sont représentés sur les figures 3.16, 3.17 et 3.18. Les diagrammes de l'irradiance mesurée par ACRIM I (figure 3.17) sont peu significatifs car la série temporelle s'arrête en juin 1989. Seule une structure centrée autour de 26 jours apparaît en 1986, structure dont on voyait le début sur les figures relatives au cycle 21. Cette structure, on l'a vu au paragraphe précédent, est visible sur tous les diagrammes en ondelettes exceptés ceux relatifs au PSI et à l'irradiance non corrigée de l'effet des taches.

L'irradiance mesurée par ERB (figure 3.17) montre une structure centrée autour de 30 jours en 1989 et une seconde centrée autour de 37 jours en 1991, cette dernière est aussi présente dans le diagramme du PSI. La structure centrée autour de 30 jours est aussi visible dans le diagramme du champ magnétique ainsi que sur ceux des indices chromosphériques et du flux à 10.7 cm. Elle n'apparaît pas en revanche sur les diagrammes du nombre de taches et du PSI mais on la retrouve dans le diagramme de l'irradiance corrigée de l'effet des taches (ERB+PSI). En 1990, une nouvelle structure a été révélée par l'ajout du PSI à l'irradiance. Elle est centrée autour de 28 jours. Elle se retrouve dans tous les autres diagrammes mais elle est peu visible sur celui du PSI et elle un peu décalée vers le début 1990 sur le diagramme des taches. Une troisième structure est visible sur le diagramme de ERB+PSI centrée autour de 26 jours en 1991. On la retrouve aussi sur les autres diagrammes. Dans le diagramme des taches, elle apparaît au milieu de l'année 1990.

De la même façon que pour le cycle 21, la période de rotation évolue de 30 jours environ à 26 jours, du maximum au minimum du cycle. Il est assez remarquable de constater combien les structures significatives des différents diagrammes se ressemblent dans leur géométrie et leurs localisations temporelle et fréquentielle. Cela tendrait à montrer que ces indicateurs sont tous influencés par le même phénomène physique et que leur réaction vis à vis de ce phénomène est à peu près la même.

Simulation du diagramme en ondelettes du Mg II c/w. La modélisation empirique est un (relativement) bon outil qui aide à comprendre et à interpréter des représentations graphiques. Mais la modélisation outil de l'interprétation peut aussi amener à des conclusions erronées, il faut donc l'utiliser avec précaution.

La simulation n'a été faite que sur l'indice du magnésium car ce travail est relativement coûteux en temps. De plus, cet indicateur est celui qui montre les structures les mieux formées, probablement parce que la périodicité autour de 27 jours est très marquée. Le but de la simulation était l'obtention d'un diagramme en ondelettes de données simulées similaire au diagramme réel. Il fallait donc "inventer" un signal composé de sinusoïdes de périodes voisines de 27 jours, dont les amplitudes variaient dans le temps, allant même jusqu'à disparaître. Afin d'avoir un peu plus d'information sur les périodes et leur localisation dans le temps, deux diagrammes en ondelettes de l'indice du magnésium ont été calculés en plus de celui présenté sur les figures 3.15 et 3.18. Le premier a été obtenu en utilisant une ondelette très bien localisée temporellement (c'est-à-dire avec peu d'oscillations dans son enveloppe). Ce diagramme a permi d'avoir une bonne résolution temporelle, la résolution sur les périodes étant quant à elle très mauvaise. Pour le second diagramme, c'est l'inverse qui a été fait : l'utilisation d'une ondelette avec beaucoup d'oscillations a permi d'avoir une bonne résolution fréquentielle et a entrainé la perte de la résolution temporelle. En étudiant de façon approfondie les deux diagrammes, il est possible d'avoir une idée des différentes périodes entrant en jeu et de leur moment

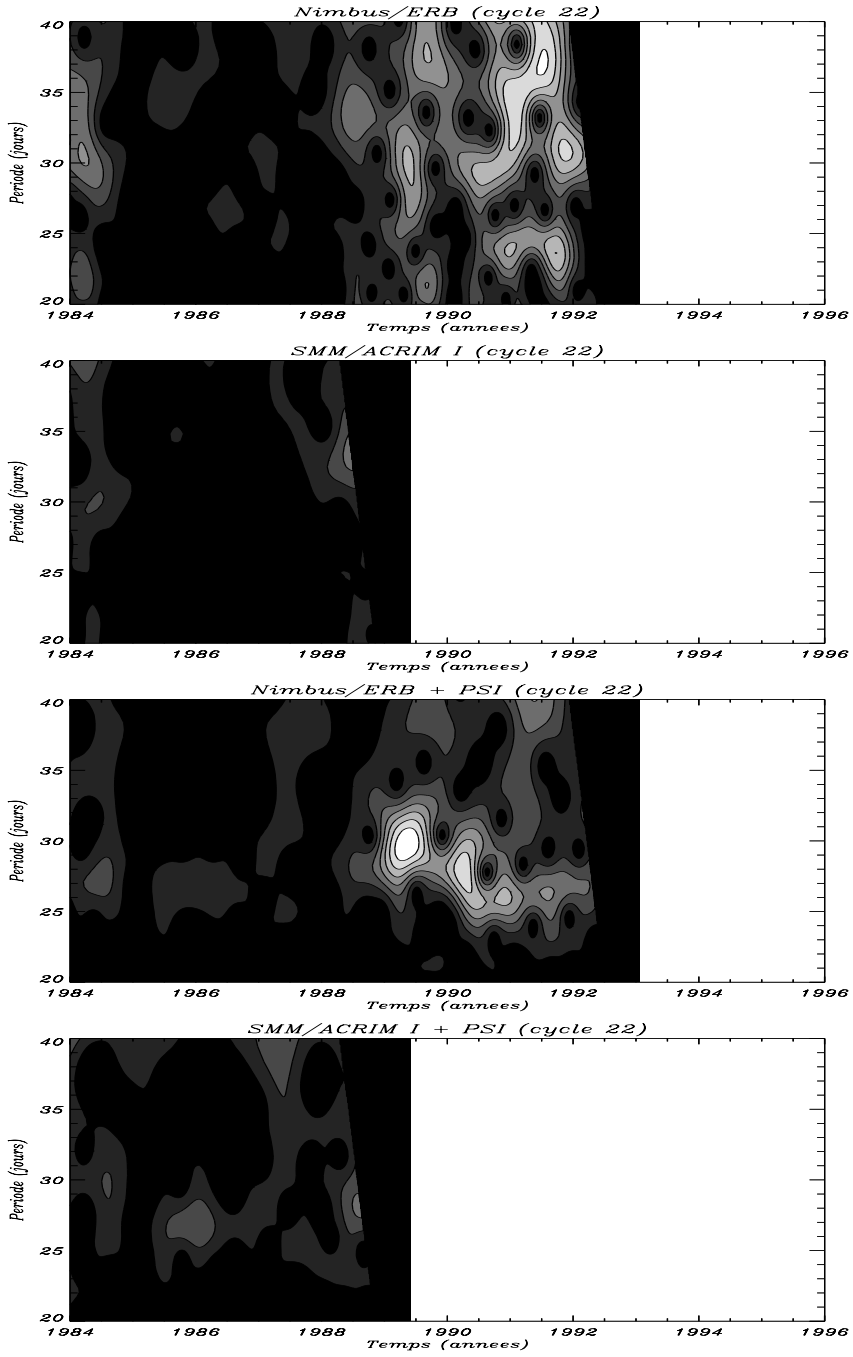


Figure 3.17: *Diagramme en ondelettes pour les indices relatifs à l'irradiance photosphérique et à cette dernière corrigée de l'effet des taches, pour le cycle solaire 22.*

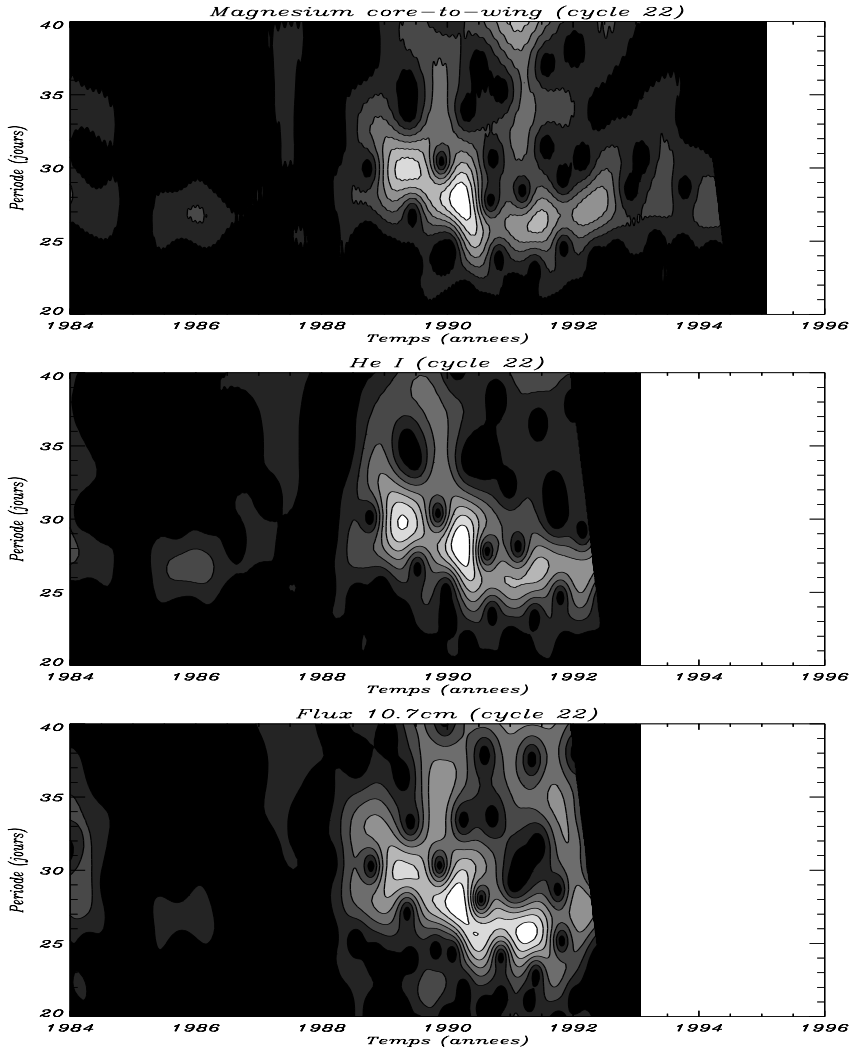


Figure 3.18: *Diagramme en ondelettes pour les indices chromosphériques (Mg II c/w et He I) et pour le flux à 10.7 cm originaire de la basse couronne, lors du cycle solaire 22.*

d'apparition. Mais en fait, le "jeu" est un peu complexe car il faut aussi tenir compte du rôle de filtre de l'ondelette, filtre dont la largeur est différente à chaque échelle, et par conséquent, il suffit de faire varier un tant soit peu un seul des paramètres de la simulation pour que, dans le diagramme en ondelettes correspondant, tout ce qui se trouve autour en soit chamboulé. Il s'agit par conséquent d'un véritable casse-tête, mais les résultats obtenus sont encourageants.

Sur la figure 3.19(a) sont représentées les différentes périodes introduites dans le signal simulé, et sur la figure 3.19(b) sont dessinées les amplitudes des sinusoïdes correspondantes. On dispose ainsi d'un signal dont les variations sont à court terme (périodes comprises entre 24 et 34 jours). La figure 3.20(b) en donne une représentation en fonction du temps, alors que la figure 3.20(a) montre les variations réelles du Mg c/w pour des périodes comprises entre 24 et 34 jours (obtenues par filtrage dans le plan de Fourier puis par reconstruction de ce qui a été laissé par le filtre). La figure 3.21 montre le diagramme en ondelettes de la série temporelle ainsi modélisée. Cela n'est pas si mauvais, compte tenu des approximations sauvages qui ont été faites. Les principales structures du diagramme réel sont présentes, ainsi que grossièrement leurs amplitudes. Cela dit, cette modélisation n'est peut-être qu'une façon parmi d'autres d'obtenir un tel diagramme en ondelettes, c'est en tout cas, la façon la plus simple (!). On voit quand même qu'il n'est pas besoin de faire intervenir des variations linéaires de la période avec le temps pour aboutir à un tel diagramme. De plus, d'après la figure 3.19, la majeure partie des périodes sont situées aux alentours de 26, 27 jours, et il faut effectivement introduire une période d'environ 30 jours au tout début du maximum du cycle 22 pour avoir l'adéquation des diagrammes en ondelettes réel et simulé. Par ailleurs, l'accord est assez bon en ce qui concerne la comparaison des variations temporelles du signal réel et du signal simulé (figure 3.20) bien que dans le cas réel ces variations sembleraient plutôt modulées par une oscillation de période 3 à 4, voire 5 fois plus grande.

D'une façon générale, ces diagrammes en ondelettes montrent qu'il faut peut-être raisonner en terme de changement de période plutôt qu'en terme de variation de période dans le temps. Tous les indicateurs analysés sont reliés aux effets du champ magnétique qui émerge à la surface sous forme de taches, de plages faculaires, de petits tubes de flux, etc. Nous avons vu dans le chapitre précédent que ces éléments peuvent avoir des vitesses qui varient avec leur âge (suivant qu'ils sont ancrés plus ou moins profondemment dans la zone convective) et suivant la latitude héliographique à laquelle ils apparaissent (rotation différentielle). Il semblerait donc que les différents indicateurs reliés à un même phénomène (relevant de champs magnétiques forts ou faibles) tournent à la même vitesse quel que soit la hauteur dont ils sont originaires dans l'atmosphère solaire. Ces analyses en ondelettes montrent aussi qu'elles peuvent apporter beaucoup de renseignements précieux quant à la relation qui peut exister entre des indices originaires de différentes couches atmosphériques.

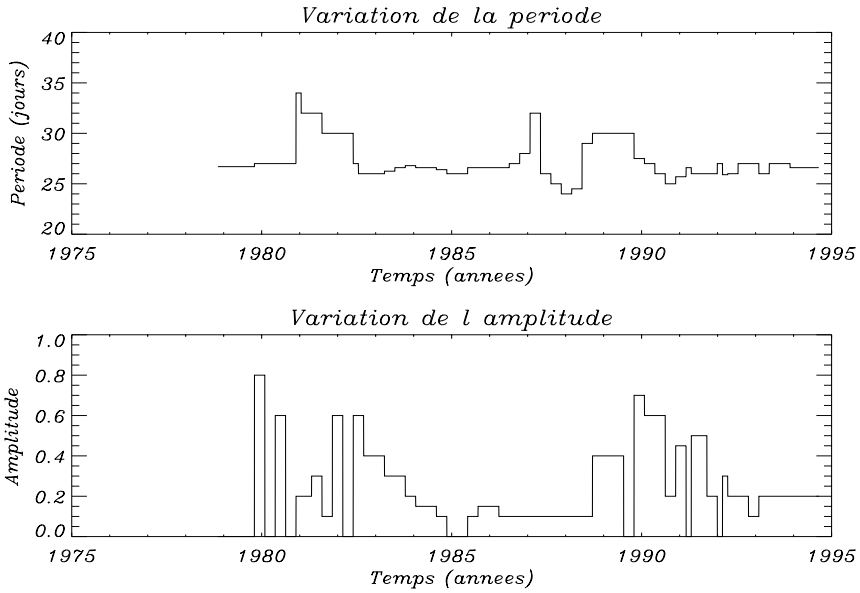


Figure 3.19: *Simulation des variations de la période de rotation telle qu'elle est vue dans le Mg II c/w.*
Sur la figure du haut est représentée la variation de la période simulée en fonction du temps et sur la figure du bas est indiquée la variation de l'amplitude de la sinusoïde correspondante.

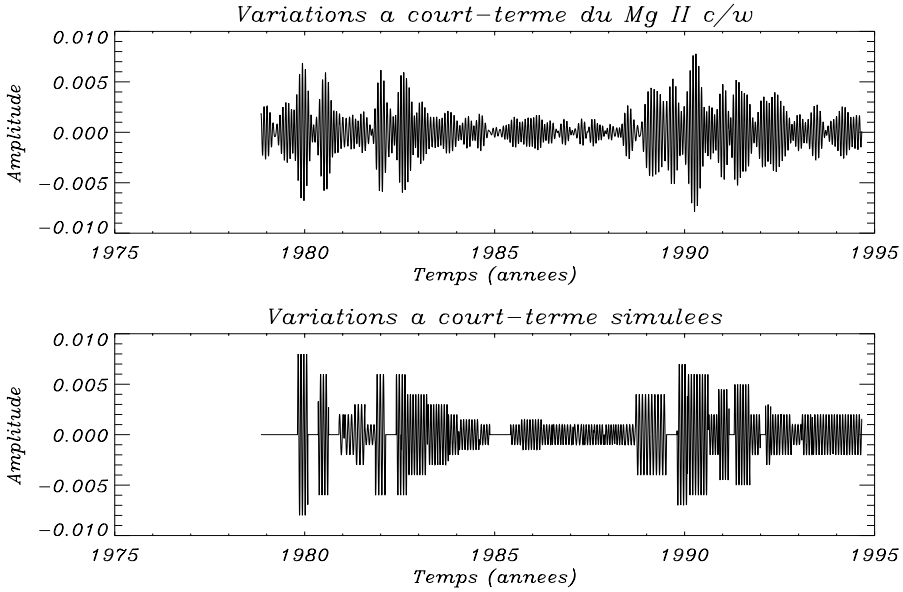


Figure 3.20: *Variations réelles et simulées des oscillations à court-terme de l'indice du Mg II c/w.*
Les variations à court terme (pour des périodes comprises entre 24 et 34 jours) du Mg II c/w sont représentées sur la figure du haut alors que les variations à court terme simulées avec les périodes et amplitudes données sur la figure 3.19 sont dessinées sur la figure du bas.

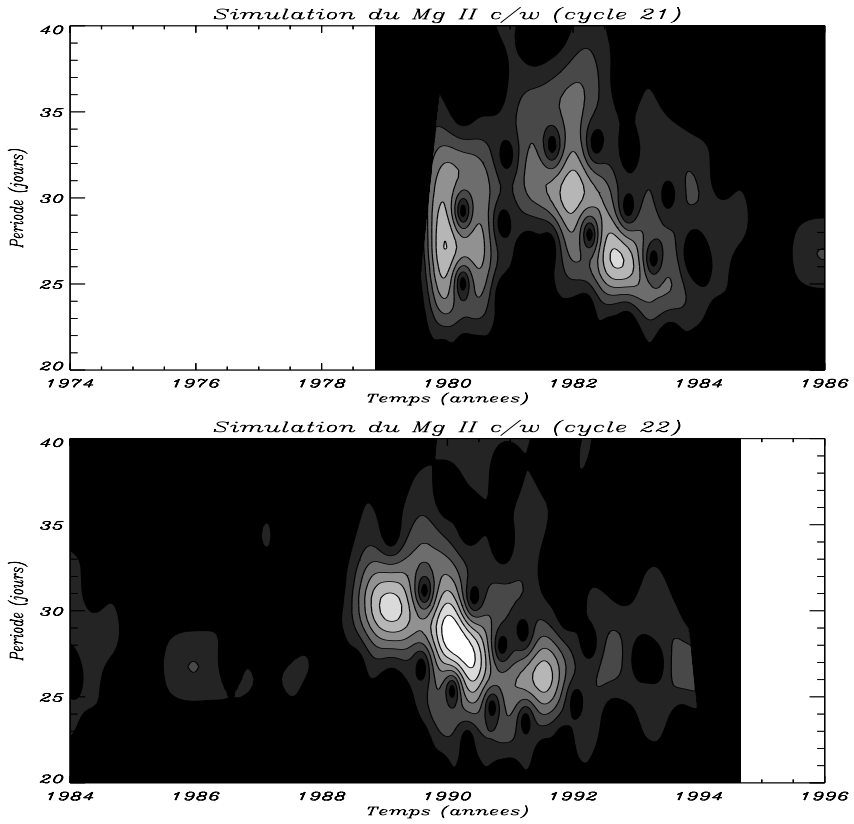


Figure 3.21: *Diagramme en ondelette simulé.*
Représentation du diagramme en ondelette de la série temporelle du Mg II c/w simulée.

Notes bibliographiques

L'écriture de ce chapitre a demandé l'utilisation de quelques manuels et cours.
Pour la première section, j'ai utilisé les cours ou ouvrages suivants :

Charbit, M. : 1990, "Elements de théorie du signal : les signaux alétoires", édition ellipse.
Chatfield, C. : 1975, "The analysis of time series: theory and practice", édition Chapman and Hall, Londres.
cours de maitrise EEA sur le traitement du signal (1989, Université Claude Bernard de Lyon I).
cours de E. Fossat (analyse d'un signal temporel, 1991, DEA)

Les ouvrages relatifs aux ondelettes sont les suivants :

Bijaoui, A. : 1991, "La transformée en ondelette I : introduction mathématique et méthodes numériques", Observatoire de la Côte d'Azur.
Billiau, A. : 1992, "Analyse en ondelettes de données gravimétriques", rapport de licence de mathématique, université catholique de Louvain, faculté des sciences, Belgique.
Combes, J. M., Grossmann, A. et Tchamitchian, Ph. : 1987, "Wavelets: time-frequency methods and phase space", comptes-rendus de la conférence internationale sur ce sujet, Marseille, eds. Springer.
Mallat, S. G. : 1989, "A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", IEEE Transf. on Pattern Anl. and Machine Intell., Vol. 11, No. 7, pp. 674-693.
Meyer, Y. : 1994, "Les ondelettes : algorithmes et applications", édition Armand Collin, Paris.
Starck, J.L. : 1992, "Analyse en ondelette et imagerie à haute résolution angulaire", thèse de doctorat, Observatoire de la Côte d'Azur.

On pourra consulter aussi avec profit les comptes-rendus du colloque "Applications of time-series analysis in astronomy and meteorology", qui s'est tenu à Padova (Italie) en septembre 1993.

Le paragraphe relatif à l'application de la transformation en ondelettes à l'étude de la période de rotation solaire est un travail original que j'ai effectué et qui n'a pas été publié ni présenté à une quelconque conférence.